网络图论简介

高等学校教学参考书

网络图论简介

邱关源编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

网 络 图 论 简 介

邱 关 源 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 4·25 字数 101,000

1978 年 12 月第 1 版 1979 年 5 月第 1 次印刷

书号 15012·0105 定价 0.37 元

序　言

图论是一门古老的但又是目前十分活跃的数学分支，它的应用已经渗透到许多学科领域。本书侧重于图论在电网络分析中的应用，但也简略地涉及某些其他网络问题。

第一章介绍图论的一些基本概念和定义，对电路理论中常用的回路、树、割集等概念作了比较详细的解释。第二章介绍图的矩阵表示，对关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵的有关重要性质及定理作了推导和证明。第三章首先讨论了电网络的独立变量，然后介绍网络方程（包括状态方程）的编写，对部分拓扑公式（即属于那些不包含互感和受控电源的电路的）作了介绍，并且讨论了网络行列式的不变性问题。这三章主要是介绍与电路理论密切相关的图的基础知识，其中某些问题的讨论可能比之一般电路教科书中所涉及到的要略深入一些。第四章概要地介绍Mason的信号流图和Coates流图。第五章则对网络的流、运输网络、通讯网络和最短路径等问题作了简短的叙述。书中包括这两章内容的主要目的是为了说明图论应用的广泛性。

本书可作为高等工科院校教师参考用，也可作为研究生、高年级学生和工程技术人员的参考读物。阅读本书需要一定的电路理论知识和数学基础。

限于编者的水平，书中有不妥和错误的地方望读者指正。

编　者

于西安交通大学，1978年10月。

目　录

第一章　基　本　概　念

§1-1　引言……1
§1-2　图……3
§1-3　抽象图……5
§1-4　描述图的局部结构的术语……8
§1-5　边的序列・路・回路……10
§1-6　连通性……11
§1-7　树和林……12
§1-8　割集……15
§1-9　断点・不可断图……19
§1-10　平面图……21
§1-11　有向图……26

第二章　图　的　矩　阵　表　示

§2-1　引言……30
§2-2　关联矩阵……30
§2-3　回路矩阵……34
§2-4　割集矩阵……42
§2-5　节点-参考路径矩阵……47

第三章　电　网　络　方　程

§3-1　电网络方程……51
§3-2　节点法……55
§3-3　回路法……61
§3-4　割集法……65
§3-5　状态方程……70
§3-6　节点导纳行列式的拓扑公式……77
§3-7　回路阻抗行列式的拓扑公式……86
§3-8　网络行列式的不变性……88

第四章　信　号　流　图　和　流　图

§4-1　信号流图……98
§4-2　Mason 公式……102
§4-3　信号流图和状态方程……107
§4-4　Coates 流图……112

第五章　网　络　的　流

§5-1　运输网络……115
§5-2　切割……117
§5-3　极大流—极小切割定理……119
§5-4　确定极大流的标记算法……122
§5-5　最短路径问题……124
§5-6　通讯网络……129

第一章　基 本 概 念

§1-1　引　言

图论是数学家欧拉所创始的。1736 年欧拉解决了当时颇为闻名的一个难题，即肯尼希堡城的七桥问题。这个城镇的普雷格尔河中有二个小岛，共有七座桥与两岸以及彼此连通，如图 1-1 所示。问题是：从陆地或岛上任一地方开始，能否通过每座桥一次且仅仅一次就能回到原地。不难发现，无论如何这是做不到的。欧

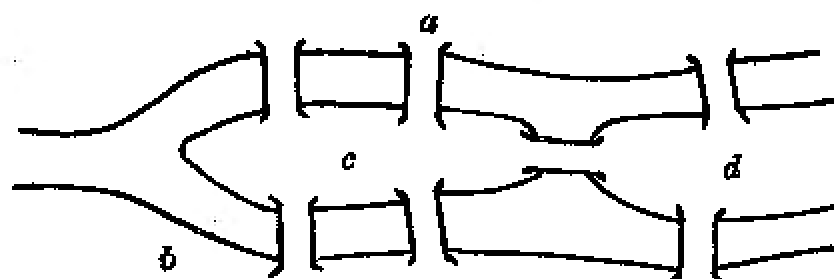


图 1-1　肯尼希堡的七座桥

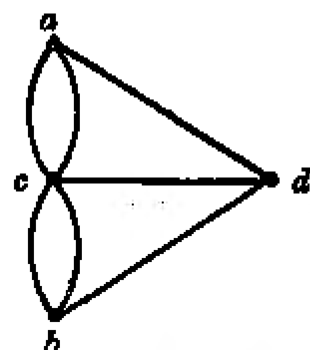


图 1-2　表示七桥问题的图

拉把这个难题化成了一个数学问题，他用一个顶点表示一个陆地区域，用联接相应顶点的线段表示各座桥，这样就得出了图 1-2 所示的一个图。于是，这个问题就变为：在这个图中，是否可能连续沿着各线段，从某一始点出发只经过各线段一次且仅仅一次而又回到出发点，即是否存在一条“单行曲线”。欧拉得出了一般结论，即存在单行曲线的必要和充分条件是：奇次顶点（所谓奇次顶点是联接于顶点的线段数为奇数）的数目是零。显然，图 1-2 的图不满足此条件。

基尔霍夫运用图论解决了电路理论中求解联立方程的问题，他引进了“树”的概念。可惜的是他的发现超越了时代而长期未被

重视。凯莱(Cayley)运用图论研究了有机化学的分子结构问题。早期图论与"数学游戏"发生密切联系，如哈密尔顿的周游世界问题，他用一个十二面体(具有12个五边形的面和20个顶点）的顶点表示世界上的20个大城市(见图1-3)，提出的问题是要求沿十二面体的边，走过每个城市一次且仅一次，最后仍回到原出发点。图1-3中所示的a、b…s、t、a示出了这样的一个旅途。

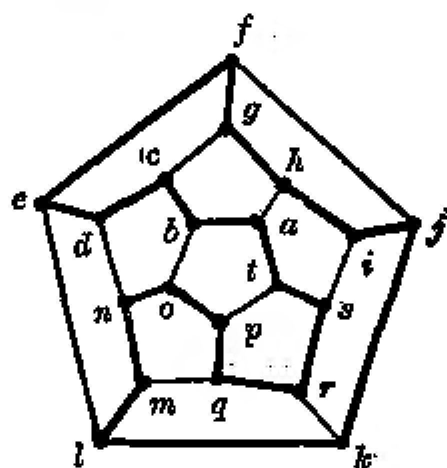


图1-3 周游世界的闭合旅途

"四色问题"或"四色猜想"是图论，也可以说是数学中的一个著名难题。一张画在平面上或球面上的地图，相邻的国家如果涂以不同的颜色，只用四种颜色是否足够?(这里相邻的国家是指具有共同边界的国家，如果只在一点相连接，则不算是相邻的。)这个问题大约只要化几分钟时间就可以把它向任何一个不懂数学的人交待清楚，但是数学家化了一个多世纪的时间始终没有彻底解决；直至最近(1976年)才有人[①]利用电子计算机，据说化费了大约1200小时的计算时间，证明了这个猜想是正确的，他们的证明中含有近100亿个逻辑判定。这个证明并不理想，但总算解决了这个难题，但是证明能否化简，是否不用计算机也能证明，尚待进一步研究。不过在企图解决这个难题的长过程中，发展了图论的许多方面。

二十世纪后，图论的应用渗透到许多学科领域，如物理学、化学、信息论、控制论、运筹学、博奕论、运输网络、通讯网络、计算机

① K. Appel, W. Haken, J. Koch 三氏。见"The Four-Color Conjecture: A Computer-Aided Proof", Science, Vol 193(13, Aug. 1976), p564, 565 所载报道。

网络、社会学、经济学、生物学、语义学以及集合论、矩阵论等等。从50年代后，图论在电路理论中也日益获得重视，在网络分析、网络综合、多端网络和多端口网络、计算机辅助设计、大型网络的分析研究等方面都占有一定的地位，其他还可包括信号流图和流图、开关网络、时序网络等。可见，图论是一门很活跃的数学分支。

本书的范围则较狭，只涉及图论在电网络分析以及其他某些方面的应用。

本章介绍有关图论的基本概念和一系列定义。可惜的是图论的术语很不统一，几乎各个作者都有他自己的一套说法，看来一时也不会统一起来。本书在第一章采用图论中常用的名称，第二、三章则采用电路理论中常用的名称，这样做主要是为了便于叙述，其实差别不甚大，稍加注意，不会造成任何困难。

§1-2 图

本书所涉及到的图(Graph)与通常人们在解析几何或函数论中所熟知的图是很不相同的。从直觉上来说，一个图是一些点的集合和一些线段的集合，其中每一线段联接在两个不同的点(或一个相同的点)上。这些点称为顶点或节点，还有其他名称，例如，点，0-单形、0胞、元等。这些线段称为边或支路，还有其他名称，例如，弧，1-单形，元等。

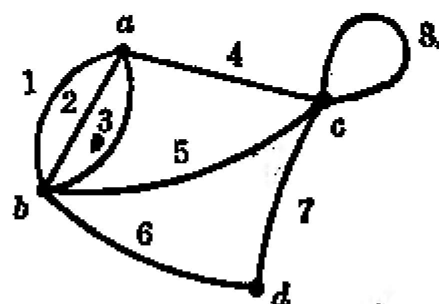


图 1-4 一个图

通常，可以把一个图画在平面上，顶点集合用平面上的一些点来表示，联接在顶点上的边或支路则用连续线段（可以是曲线或直线）来表示。例如，在图 1-4 所示的一个图中，顶点的集合为 $V=(a,b,c,d)$①，边的集合为 $E=(1,2,3,4,5,6,7,8)$。边

① 有关集合的符号将在下一节介绍。

1联接顶点 a 和 b，我们说，边 1 与顶点 a 和 b 有关联，或者说，顶点 a、b 与边 1 有关联。边 1、2、3 都联接在顶点 a 和 b 上，这些边称为“并行的”，具有并行边的图有时称为多重图。与边 8 所关联的只有一个顶点 c，这种边称为自环。

一般说来，在画一个图时，顶点的位置并不重要，关键的是顶点与边是如何联接的。另外，各边除了它们所联接的顶点以外，并没有其他任何公共点。

上面所介绍的图，有时称为几何图。所以，一个(几何)图 G 可以定义为：图 G 是满足下列条件的一些顶点和边的一个集合，这些条件是：(1)每一条边恰好联接在两个(或一个)顶点上；(2)除了顶点以外，边没有任何公共点。

电路理论所依据的基尔霍夫电流定律和电压定律只与电路的拓扑性质有关，或者说，只决定于电路的联接性质，而与各个支路所含元件内容无关。因此任何具体电路都可以抽象为一个图，如图 1-5 所示，其中图 1-5b就是 1-5a所示电路的一个图，电路的每一条具体支路，用一条相应的边来代替。

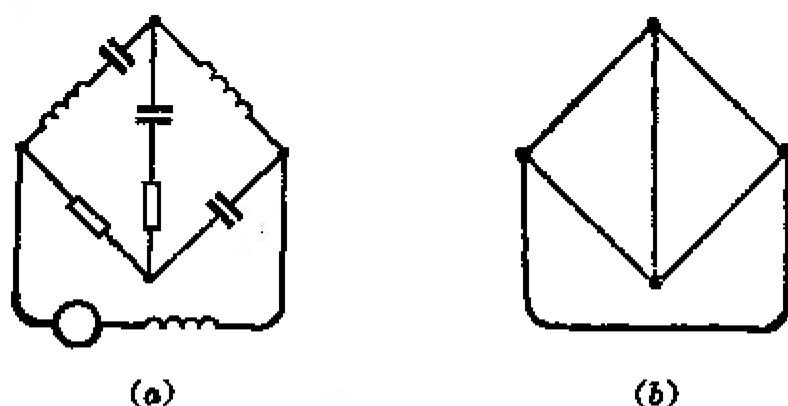


图 1-5　电路的图

不难理解，图还可以用来表示许多其他结构，例如一个公路系统，如果忽视道路的宽度而用边来表示各道路，并把各道路的交叉点当作顶点，那末这个系统就可以抽象为一个图。前面的图 1-2 又是一个例子。后面还将举出许多例子。

上面介绍了几何图，但是图的最本质的内容则是一种二元关系，或者说任一条边有两个顶点与它发生联系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线来表示则完全是不必要的。换言之，图的定义还可以进一步抽象化，下一节将介绍抽象图的概念。

§1-3 抽　象　图

为了一些定义和叙述的需要，将用到与集合论有关的符号和概念。这些符号不仅可以使思维简捷，而且形成了一种易于掌握的和有效的工具。下面简要地作一些说明，对于熟悉的读者，主要是了解一下以后所用的符号，不熟悉的读者只需化费不多时间，就可以掌握。

将用大写拉丁字母，如 A、B、G、X 等来表示集合，集合的点或元素则用小写拉丁字母 a、b、x(有时，只要含义明确，也用数字)等来表示。集合 A，其元素为a、b、c、d 则记为(a, b, c, d)。有时，属于一个集合的各个元素，其本身也是一个集合，这样就有一族集合。这种情况下，这些元素将用大写字母来表示。“没有元素”的总集，称为空集，记为ϕ。

设 A 和 B 是已知的两个集合。当 a 是集合 A 的元素时，就记为$a\in A$，a 不是 A 的元素时，记为 $a\bar{\in} A$。如果 A 包含于 B 内，即 A 的每一元素都是 B 的元素，则 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$。当 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则 A等于 B，记为 $A=B$。若 A 不等于 B，则记为 $A\neq B$。如果 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，A 就真正包含于 B 内，这时 A 称为 B 的真子集，记为 $A\subset\subset B$。

同时属于 A 和 B 的那些元素所成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，见图 1-6a。属于 A 或属于 B 或同时属于二者的那些元素的集合，称为 A 与 B 的合集，记为 $A\cup B$，见图 1-6b。属于 A 但不属于 B 的那些元素的集合，称为 A 中 B 的余集，记为 $A-B$，

见图 1-6c。

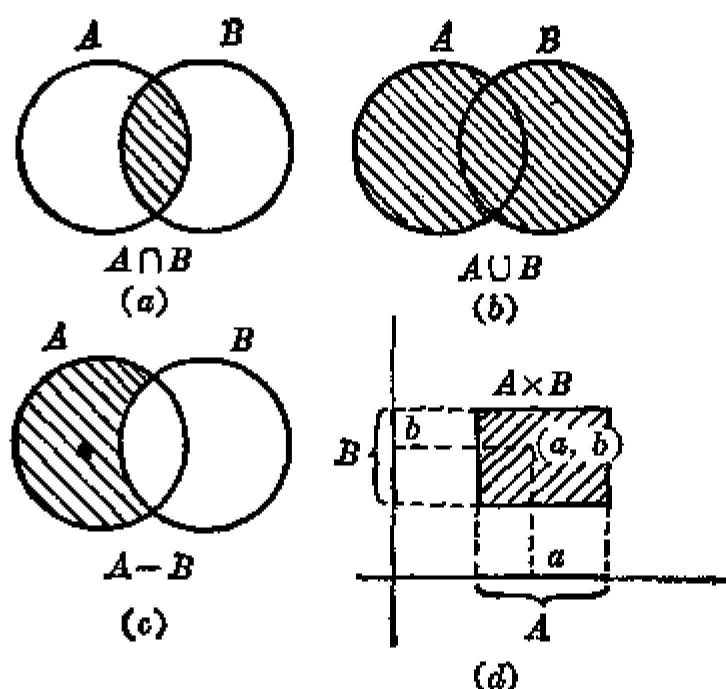


图 1-6 交集、合集、序积等

由 $a \in A$ 与 $b \in B$ 所组成的有序元素偶(a,b)构成的集合(见图 1-6d)称为 A 与 B 的有序积，记为 $A \times B$。一个集合 S 与它自身的有序积 $S \times S$ 将是有序元素偶(s,t)构成的集合，其中 $s \in S$，$t \in S$。除了 $s=t$ 以外，(s,t)与(t,s)显然是不同的。如果用$[s,t]$记集合 S 的无序元素偶，而全部无序元素偶的集合记为 $S \& S$，那么后者将称为 S 与它自身的无序积。这里$[s,t]$与$[t,s]$将表示同一元素偶，且允许 $s=t$。

给定两个集合 X 和 Y，又给定一个规律 σ，使每一元素 $x \in X$ 恒对应于 Y 的一个确定元素(或子集)，记为 σx，这个规律叫做 X 在 Y 里的映射，或称为定义于 X 上而在 Y 里取值的函数。

有了以上的一些初步知识，抽象图(下面仍简称为图)可定义如下：图是由一个非空集合 V 和一个与 V 不相交的集合 E(E 可能是空集)，以及一个 E 在 $V \& V$ 里的映射 σ 所组成。V 和 E 的元素分别称为图的顶点和边，而 σ 则称为与此图有关的关联映射。

如果 $e\in E$，v 和 w 为那些顶点使 $\sigma(e)=[v, w]$，则边 e 称为与顶点 v 和 w 关联，或反之。其余的顶点就认为与 e 无关联。与某一个边关联的顶点称为该边的端点，而且认为它们被该边所联接。

这样，一个图 G 可用 $G=(V, E, \sigma)$ 来表示，或者当关联映射隐含时，则可用 (V, E) 来表示。一般 V 和 E 都应当不是空集；只有某些特殊条件下才会产生 E 是空集的情况。

如果 V 和 E 都是有限集合，则 G 称为有限图；否则就称为无限图。本书只研究有限图。

这里介绍抽象图的目的，不仅是为了使图的概念脱开任何几何上的意义，主要是为了便于理解图的应用的广泛性。例如，设 V 是人的集合，边表示人与人之间的关系(如父子关系)，那末亲族关系就可以用一个图来表示。当然，这个抽象图仍然可以用几何图来表示，如图 1-7 所示，但是，这里的顶点和边对于描述人与人之间的关系并没有任何实质的几何意义。不过，通过图 1-7 可以更形象地来理解这些关系，所以只要有可能，总是用几何图来表示一个抽象图。这是“图”的命名的由来，同时，这样做有助于我们理解图的许多有关性质。

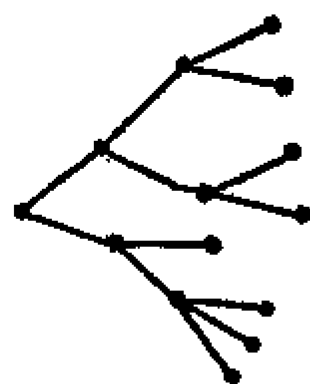


图 1-7　表示亲族关系的图

其他例子很多；例如，走棋的规律，一个工程的工序及其执行，语法上的关系，军事部门中指挥员和他的每一个部下的关系，等等，都可以用抽象图来描述。

上面提到了抽象图用几何图来表示的问题。这就是说，一个抽象图与一个相应的几何图具有“同构”的性质。同构性(isomorphism)可以定义如下：如果图 $G=(V, E)$ 和 $G'=(V', E')$ 的 V 和 V' 及 E 和 E' 之间在保持关联性质的条件下为一一对应，则 G 和

G'称为同构。换言之，当且仅当图G'中的相应边e'和顶点v'关联，则图G中的边e和顶点v关联。如果抽象图G与几何图G'同构，则G'称为G的"几何实现"。显然，几何图彼此之间也可以具有同构性。

今后，我们所研究的主要将是几何图，且简称之为图。

如果把一个图G的顶点和边标以适当的号码(或字母)，则G称为标号图。今后，讨论的主要是标号图，至于是否具体标号则视情况而定。为了便于区分起见，顶点的标号在图示中有时将带有一个小圆圈。图1-8a为一标号图G，图1-8b则为与a同构的另一个图G'。这两个图表面上看来截然不同，但不难说明它们是同构的。如以$V=$(①,②,③,④,⑤,⑥)表示G的顶点集合，$V'=$(①,②,③,④,⑤,⑥)表示G'的顶点集合，则容易看出这两个图的对应边与对应顶点关联，就是说，关联性质被保持。

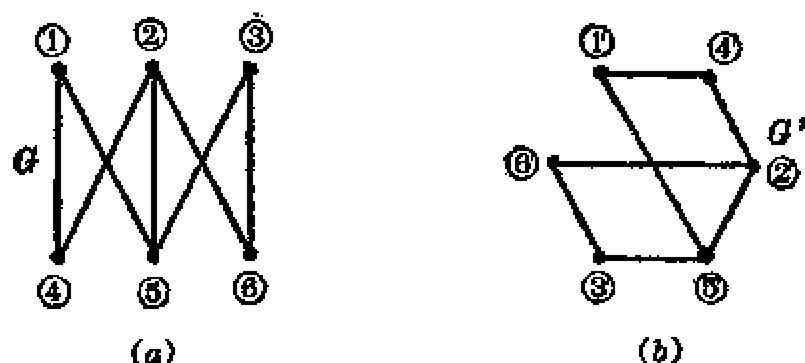


图1-8　同构的标号图

§1·4　描述图的局部结构的术语

为了说明一个图的结构特点，引进下列一些术语，某些在前面已引用过。

当一条边e与两个顶点v和w有关联，v和w称为e的端点。为了叙述方便，以顶点v和w做端点的边记为$e=[v,w]$。如果$v=w$，则v是e的唯一端点，e称为自环。如果两条边e_1和e_2与顶

点 v,w 关联，即 $e_1=[v,w]$ 和 $e_2=[v,w]$，则 e_1 和 e_2 称为并行边。两个自环与同一顶点关联也称为并行边。前已指出，如果图中存在并行边，则称此图为多重的。

如果顶点 v 和 w 之间至少存在一条边 e，则 v 和 w 称为相邻的顶点。同样，如果两条边 e_1 和 e_2 至少有一个共同的顶点，则 e_1 和 e_2 称为相邻的边。注意，相邻的性质是指相同元素（边或顶点）之间的关系，而关联性质则指不同元素之间的关系。

与一个顶点 v 关联的边的数目称为 v 的次数（若 v 上有一个自环，则作为 2 计算），记为 $d(v)$。如果 $d(v)=0$，即没有任何边与 v 关联，顶点 v 称为孤立点。如果一个图的全部顶点都为孤立的，此图称为退化图。

一个图 $G=(V,E)$ 的子图 $G_s=(V_s,E_s)$ 是这样的一个图，其 V_s 和 E_s 分别为 V 和 E 的子集。如果 $V_s \subset\subset V$ 和 $E_s \subset\subset E$，即 V_s 和 E_s 分别为 V 和 E 的真子集，则 G_s 为 G 的真子图。如果 $V_s = V$，则子图 G_s 称为 G 的生成[①]子图。

为了说明上述的定义，参阅图 1-9。图 1-9a 为一个图 G。顶

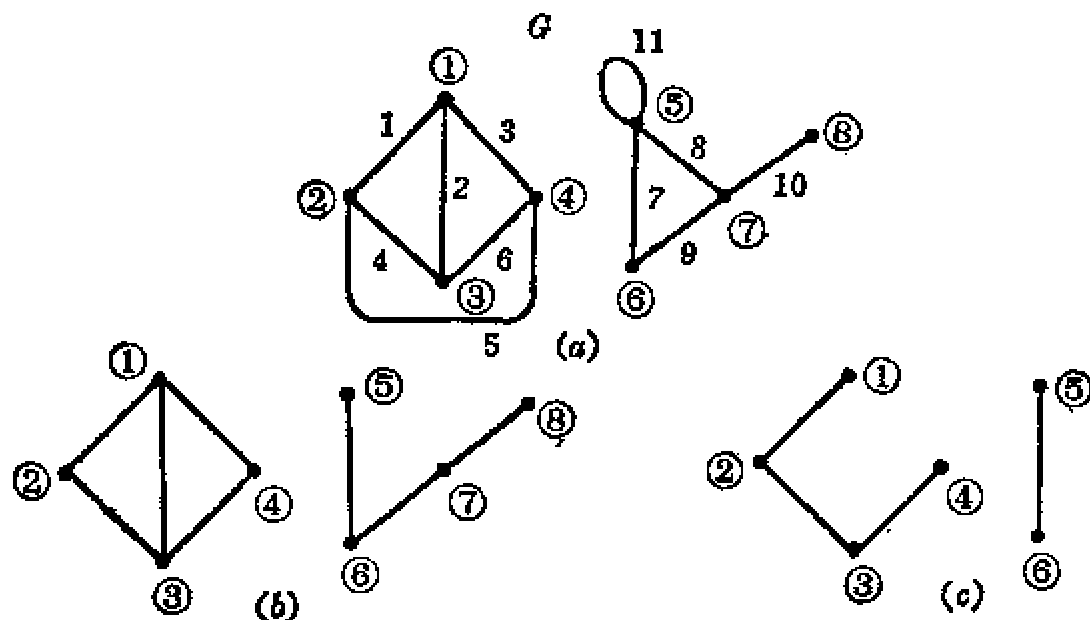


图1-9　图G及其子图

---

① Spanning

点①,②;①,③;①,④;⑤,⑧;等为相邻的,但是顶点①,⑤;⑤,⑧;等是不相邻的。边1,2,3;8,9,10为相邻的;但是边1,6;3,4等为不相邻的。

顶点①的次数 d(①)=3,顶点⑧的次数 d(⑧)=1,其他如 d(⑥)=2,d(⑤)=4。

图1-9b为G的生成子图,因为它包含G的全部顶点。图1-9c为G的一个(真)子图。

§1-5 边的序列·路·回路

直观上不难理解,有可能从一个图的某一顶点出发,沿着一些边连续移动,从而达到另一指定的顶点,或回到原来的出发点。这种由边的序列构成的路径在图论中占有重要地位,例如人们熟悉的回路就是一个例子。

下面是有关边的序列的正式定义。对于图G的n个边$e_1, e_2, \cdots, e_n$,如果存在$n+1$个顶点序列v_0, $v_1, \cdots, v_n$,使得$e_k=[v_{k-1}, v_k]$, $k=1,2,\cdots,n$,则这些边构成了一个边的序列,换言之,每一条边e_k和e_{k-1}以一个端点相衔接,和e_{k+1}以另一个端点相衔接。在这个定义中,并没有规定边必须是相异的。同样,也没有规定顶点必须是相异的。这种边的序列称为链。

当$v_0=v_n$时,此边的序列或链是闭合的,而当$v_0 \neq v_n$时,则是开的。在后一种情况下,此链是从顶点v_0到v_n,v_0称为链的起点,v_n称为链的终点。链中含有n条边时,则称它的长为n。任一条边可看作是长为1的链。

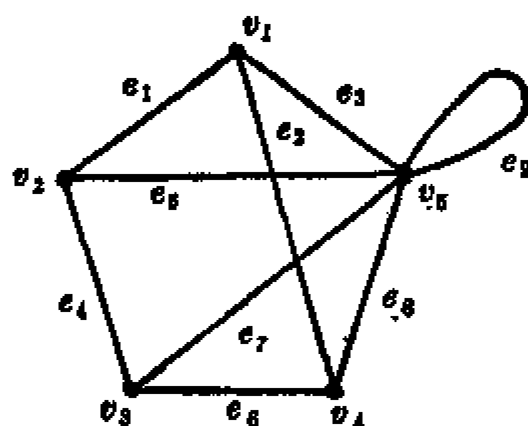


图1-10 边的序列

为了说明上述定义,可参阅图1-10。边的序列e_1, e_5, e_9, e_7,

e_6 是长为 5，从顶点 v_1 到 v_4 的一条链；相应的顶点序列为 $v_1, v_2, v_5, v_6, v_3, v_4$。边的序列 $e_2, e_6, e_7, e_8, e_6, e_4$，$e_1$ 是长为 7 的闭合链。

如果链中所用到的边都相异，则称为单纯链，如果链中每个顶点的出现不超过一次（显然，这时用到的边都将相异），则称为初等链。

一条开的，初等的链称为路(path)。如果一条路用的顶点数为 $n+1$，则用到的边数为 n，这条路的长为 n。

一条闭合的，初等的链称为回路（这里沿用了电路理论中常用的名称）。所以回路是一条起点和终点重合的初等链。

为了说明上述定义，参阅图 1-10。边的序列 $[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4], [v_4, v_5]$，即 e_1, e_4, e_6, e_8，构成的一条长为 4 的路。边的序列 $[v_1, v_4], [v_4, v_5], [v_5, v_2], [v_2, v_1]$，即 e_2, e_8, e_5, e_1，是一个回路；但是 $[v_1, v_4], [v_4, v_5], [v_5, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_5], [v_5, v_1]$ 虽然是闭合链，但不是初等的，所以不是一个回路。

按上述定义，可见图 G 的一个回路是 G 的一个子图，其每个顶点的次数恰好是 2。

§1-6 连 通 性

一个图，如果它的每两个相异顶点之间总存在自一顶点联到另一顶点的一条路，则这个图是连通的。直观上，一个连通图本身构成了一个整体部分。图 1-11a 为一个连通图，1-11b 是非连通

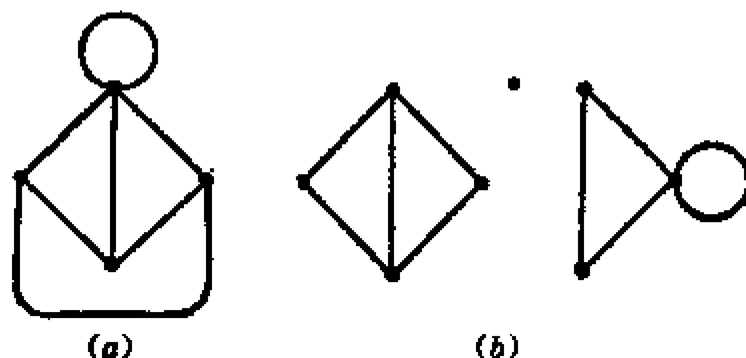


图 1-11　连通图与非连通图

的或分离的。

一个非连通图可以看作是由几个连通的部分所组成的，每一这种连通部分称为该图的一个分离部分或简称一个部分。所以图的一个部分是该图的一个包含极大边数的连通子图。一个孤立顶点也算作一个部分。图 1-11*b* 的图包含三个部分，其中有一个部分只有一个孤立顶点。

如果一个连通图中包含回路，则移去回路的任一条边后，剩下的子图仍将是连通的。

§1-7 树 和 林

树的概念在图论中占有重要地位。前曾指出，图论中许多术语的命名很不统一，但"树"却几乎是所有图论著作中唯一所通用的命名。

一个连通图 G 的一个子图，如果满足下列条件就称为 G 的一个树，即此子图：(1)是连通的，(2)没有回路，(3)包含 G 的全部顶点。例如，对于图 1-12*a* 所示的图 G，它的几个树分别示于同图 *b*、*c*、*d* 中，但 *e* 和 *f* 则不是它的一个树，因为 *e* 包含一个回路，*f* 则是不连通的。

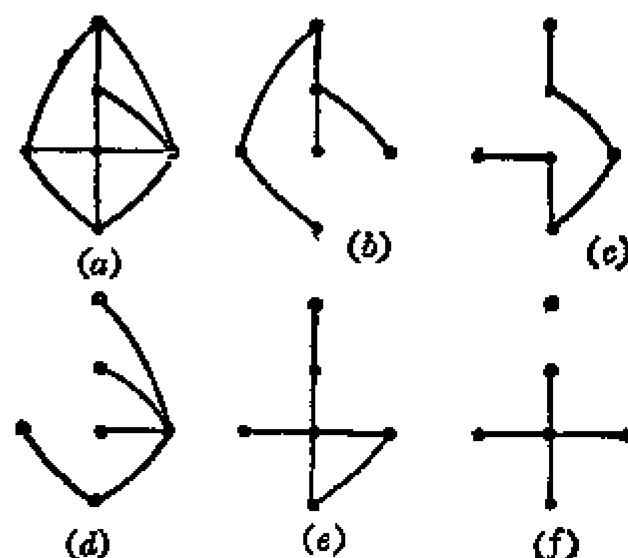


图 1-12 树

上述关于树的定义是电路理论中所常用的。这种树称为图G的生成树，因为它包含了G的全部顶点。在图论中，树的一般定义则比较广义一些，即凡是一个连通的且无回路的图定义为一个树。按照这个定义，图1-12f包含一个树和一个顶点，但不是G的生成树。所以这两个定义略有差别。今后我们谈到树，若不加说明，则指生成树。

同一连通图G具有许多不同的树，一个图的全部相异树的总数之多是惊人的。后面将介绍树的计数方法。

一个非连通图的各个部分，各自都有它们的树。这样就构成一个林。一个由k个分离的连通部分所组成的，且不包含任何回路的图，称为一个具有k个树的林。

树具有许多重要的性质。在一个树的两个顶点之间，必然存在一条且仅有一条路。前一点是由于树的连通性质所决定的；后一点则是由于树不包含回路所决定的，因为如果两顶点之间存在两条路，则将有回路出现。

把一个树的任一边移去，将使图变成不连通的，这是因为被移去的边是联接其两个端点的唯一条路。反之，对于任何连通的且不是一个树的图，总有可能移去它的某些边(即包含在回路中的边)而仍保持图的连通性。所以一个树是由那些恰好足够把全部顶点联接起来的边所构成；或者说，在某种意义上，树是一种极小的连通图，即它不包含任何包括全部顶点但又连通的真子图。

在一个图里，若只有一条边与顶点x关联，则x称为悬挂点。一个树至少有两个悬挂点。这可以证明如下：设T是一个树，并假设它没有或只有一个悬挂点。设想一个旅游者，在图上沿着边旅游，自任一点出发(对第一种情况来说)，或者自悬挂点出发(对第二种情况来说)；若规定不使用同一边两次，由于T没有回路，他就不能遇到同一顶点两次。但是另一方面，当旅游者到达一点v之

后，由于 v 不是悬挂点，他总能沿一条新边前进。这样一来，他便可以永远游下去，但图是有限的，这不可能。

对于图 G 的一个树 T，凡是属于此树的边称为 T 的树支，凡是不属于 T 的边则称为连支。

树支数和顶点数之间的关系可用下列定理来表达。

定理 1-1 具有 n_t 个顶点的任何树，其边数恰好等于 n_t-1。

这个重要定理可以证明如下：一个具有 n_t 个顶点的树，至少有两个悬挂点。把联于一个悬挂点的边连同悬挂点从树中移去，剩下的将是一个具有 n_t-1 个顶点的树；它至少有两个悬挂点。重复上述步骤，直至剩下最后一条边以及它所联接的两个顶点，这时移去的边数是 n_t-2。所以，树的边数是 n_t-1。

显然，对于一个具有 n_t 个顶点的连通图 G，G 的任一个树，其树支数为 n_t-1。对于具有 k 个部分和 n_t 个顶点的非连通图，则对每一个部分任选一个树，总共将有 k 个树，所以树支数将是 n_t-k。

一个具有 n_t 个顶点的连通图 G，G 的秩 $\rho(G)$ 定义为 n_t-1。同理，一个具有 n_t 个顶点和 k 个部分的图，其秩定义为 n_t-k，即 $\rho(G)=n_t-k$。

定理 1-2 一个具有 n_t 个顶点和 b 个边的连通图，其连支数为 $l=b-n_t+1$。

这里所说的连支是针对一个树来说的。按定理 1-1，树支数为 n_t-1，树支数和连支数之和为 b，故连支数 l 为 $b-n_t+1$。

顺便指出，一个连通图的圈数 $\nu(G)$ 定义为 $b-\rho(G)$，即 $\nu(G)=b-n_t+1$。一个具有 k 个部分的图，其圈数为 $\nu(G)=b-n_t+k$。

对于一个图的任一树，若添进一个连支，所得的图将不再是树。此连支所联接的两个顶点之间，在树中存在一条唯一的路，因此它与这条路形成了一个回路；而这个回路又是现在图中的唯一

回路，见图 1-13a。

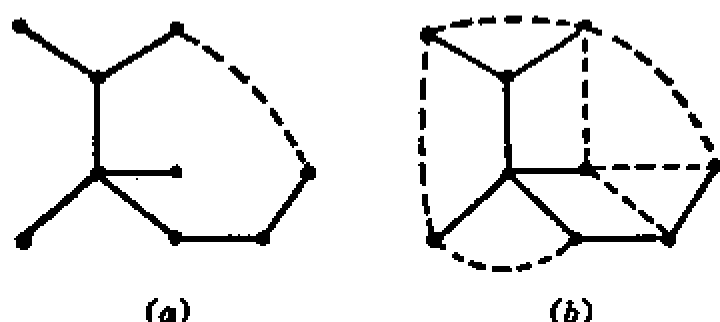


图 1-13　基本回路组

如果一个连通图 G 具有 n_t 个顶点和 b 个边，则可以任选它的一个树 T。然后设想对 T 添进一连支，它将与树的唯一条路构成一个回路。如果把连支逐条添进去，这样就会有 $(b-n_t+1)$ 个这种回路。这一组回路称为单连支回路或基本回路，简称为 f-回路，见图 1-13b。

把以上有关树的性质总结一下。设 T 是一个具有 $n_t(>1)$ 个顶点的图，以下的任一点都可以用来描述树 T 的特性：(1)T 连通且无回路；(2)T 连通且具有 (n_t-1) 条边；(3)T 无回路且具有 (n_t-1) 条边；(4)T 连通，但去掉任一边，图就不连通；(5)有一条且仅有一条路连接每一对顶点；(6)T 无回路，但不相邻的两个顶点之间联以一边，便得一个且仅一个回路。

§1-8　割　集

回路、树都是图论中的重要概念。割集与回路在概念上密切相关，而且与树的概念也有着重要的联系。首先，什么是割集？割集是连通图 G 的一个边的集合，把这些边移去将使 G 的秩减少一，或者说，使 G 分离为两个部分，但是，如果少移去其中一条边，图仍将是连通的。

对于一个具有 n_t 个顶点的连通图 G，其秩为 n_t-1，故把属于割集的边移去后，将得到一个非连通图，其秩为 n_t-2，或者说将得

到一个具有两个部分的图。割集的命名是由这种含义得来的。例如，对于图 1-14a 的图 G 来说，边的集合(a, d, e)，(a, b, e, f)分别构成一个割集。图中用虚线画出的闭合面则是为了帮助找出或表示割集的一种方法，即与它切割的边构成了一个割集。这个方法不是所有情况下都能用的。例如，边的集合(a, c, d, f)是一个割集，而在图 1-14a 中就无法用上述闭合而切割的方法来表示；不过如把图 G 重画如图 1-14b，则仍可应用上述方法。

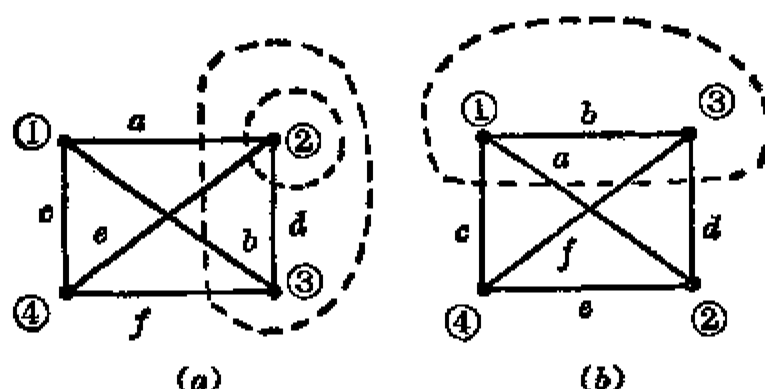


图 1-14 割集

在上述的有关割集的定义中，有两点值得注意。第一点，按这种定义，割集是一种极小集合，也即如果少移去其中的一条边，图仍将是连通的，例如，图 1-15a 中，用虚线表示的边(a, b, c, d)就不构成一个割集，因为如果少移去一条边 d，仍将使图分离；但是(a, b, c)则是一个割集。第二点，对于图 1-15b 所示的图，其中用虚线所示的边的集合(a, b, c, e, f)，移去后将使图分离为三个部分，或

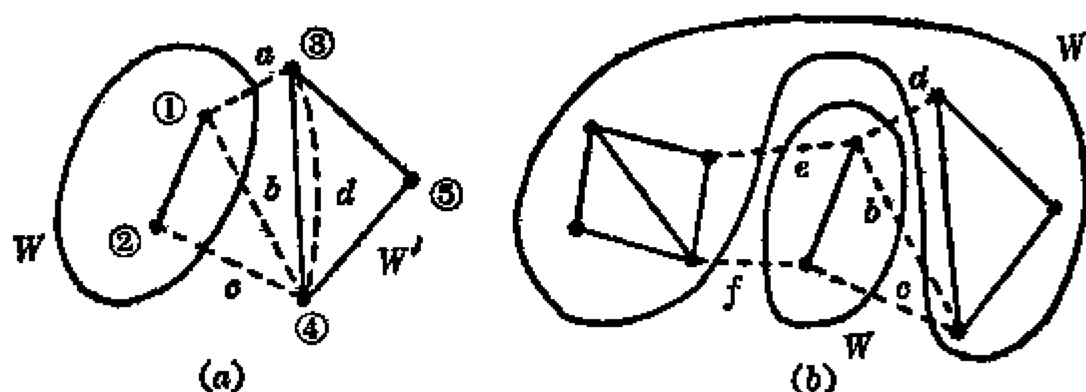


图 1-15 关于割集的定义的讨论

使图的秩减少 2，这种边集合也不构成所定义的割集。

我们还可以从另外一种观点来理解割集。令 $G=(V, E)$ 为一个连通图，并令 C 为 G 的一个割集，当把 C 移去后，G 就分离为两个部分。令 W，W' 分别为两部分的顶点集合，则 $W'=V-W$（W 或 W' 可能为一个孤立顶点）。W 和 W' 为互不相交的两个集合。W 中的任两个顶点之间存在一条不包含 W' 中任何顶点的路；这对 W' 中的顶点同样成立。割集 C 中的各边将有一个顶点在 W 中，另一个顶点在 W' 中。G 的其他边将不具有这种性质。反之，如果把 G 的顶点分为两个互不相交的集合 W 和 W'，使得同一集合中的任两个顶点之间存在一条路，而此路又不包含另一集合中的任何顶点，这样，G 中连接 W 中一个顶点和 W' 中一个顶点的那些边就构成一个割集。

例如，图 1-15a 中，W 包含顶点①，②，W' 包含顶点③，④，⑤，边 (a, b, c) 构成一个割集。图 1-15b 中，由于 W' 中的某些顶点之间不存在不经过 W 中顶点的路，因此虚线所示的边 (a, b, c, e, f) 不构成所定义的割集。其实，前面已指出把该图中的 (a, b, c, e, f) 移去后将使图分离为三个部分。它的一个真子集，如 (a, b, c) 是一个割集，(e, f) 也是一个割集。

顺便指出，边的集合 (a, b, c, e, f) 构成一个所谓离集(seg)。如果把一个图 G 的顶点集合分为两个互不相交的 W 和 W'，离集是一个顶点在 W 中，另一个顶点在 W' 中的那些边的集合。离集是由边互不相交的割集所构成的合集，例如，前面的 (a, b, c) 和 (e, f) 构成一个离集。可见离集不一定是割集，但反之，割集总是一个离集。

设 $G=(V, E)$ 是一个至少有两个顶点的连通图，并令 $v \in V$（即任取 G 的一个顶点），把 V 分成两个集合 (v) 和 $(V-v)$。这样，与顶点 v 关联的边将构成一个割集，例如图 1-14a 中的 (a, d, e)。换

言之，与连通图G的任一顶点关联的边构成一个割集。但是，如果所涉及到的顶点是一个断点（见§1-9），则情况将有所不同。例如，图1-16a中的顶点①，把与它关联的边a, b, c, d移去，图将分离为4个部分或秩减少3，见同图b。其实，这里(a, b)构成一个割集，c和d又分别为割集。顶点①是一个断点，其定义将在§1-9中解释。所以可以得出下列结论：只要一个顶点不是图的断点，则与此顶点关联的边构成一个割集。

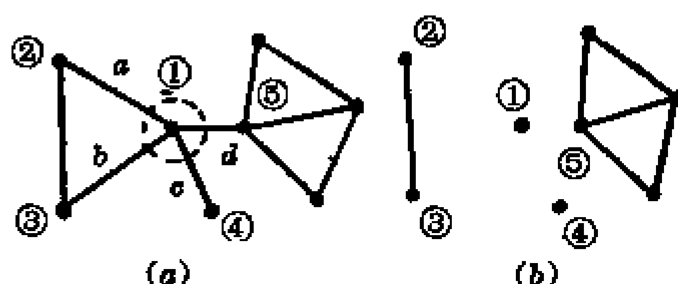


图1-16　与顶点有关的割集

树与割集的概念具有互补的性质。树是连通一个图的全部顶点的极小边集合，割集则是把某些顶点与其他顶点分离的极小边集合。因此它们之间存在着一定的联系是不难理解的。下面的定理将充分说明这一点。

定理1-3　一个连通图G的一个割集C至少包含G的一个树的一个树支。

证明是很容易的。如果把C移去而仍有一个树T存在，则图是连通的，那末C将不是一个割集。

通过图G的一个树T的一个树支可以把图的顶点划分为两个部分。令e_t为T的任一个树支。把e_t移去，将使T分离为各自连通的两个部分（见前面树的性质4）。这样把G的顶点划分为两个互不相交的集合W和W'。按照W和W'可以定义G的一个割集，它包含e_t且包含一些有关的连支（即那些联接W和W'的连支）。这种割集称为单树支割集或基本割集，简称为f割集。按定理1-3，任何割集至少包含一个树支，而f-割集则恰好只包含一

个树支，这与f-回路类似，任何回路至少包含一个连支，而f-回路只包含一个连支。对应顶点数为n_i的连通图G的一个树T，可以定出(n_i-1)个f-割集，每一个f-割集包含T的一个树支，这样得到一个基本割集组或f-割集组。

图1-17画出了一个图G，其中虚线为图G的一个树T的树支，实线为连支。图中又示出了对应树支e_t的f-割集，以及有关的两个顶点集合W和W'。凡在W或W'中的那些连支，显然不属于此f-割集。凡属于此f-割集的每一连支，由这种连支所构成的f-回路，必将包含e_t。这是因为当沿着任一这种连支，例如图中的e_1所构成的f-回路，从W的一个顶点经过e_1到W'后，再由W'返回时，必将经过树支e_t。由此可得如下定理：

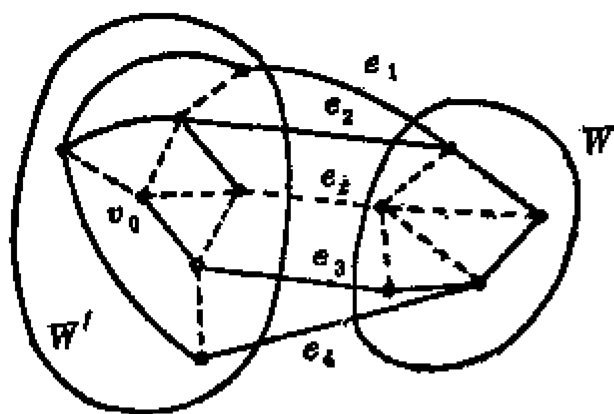


图1-17 f-割集

定理1-4 如果T是连通图G的一个树，由T的一个树支e_t确定的f-割集应恰好包含G的那些连支，每一这种连支所构成的f-回路中含有e_t。

另外，如果设想从W(或W')中的任一顶点v_0出发（见图1-17)，沿着任一回路移动，一种可能将是始终在W(或W')中，另一种可能将是往返于W和W'之间偶数次。显然，这个结论对任何割集都成立。由此有下列定理。

定理1-5 连通图G的每一回路与每一割集共有的边数为偶数(包括零)。

§1-9 断点·不可断图

在一个连通图G里，一个顶点x_0，将它移去后(把一个顶点移

去，意味着把此顶点以及与之关联的全部边移去）所得的子图 H（$=G-x_0$）如果不再连通，则这样的顶点称为断点。对于任一个树，所有非悬挂点都是断点。下面的例子将说明断点的某种意义。设顶点集合 V 表示某一组织的成员，若成员 x 与成员 y 可以相互联系，便取 $[x,y]$ 为一条边，即 $[x,y]\in E$。这样，图 $G=(V,E)$ 的断点可能表示那些具有重要意义的联系人员，这些人员的丧失，将破坏人员在组织上的统一和联系。

如果一个图 G 是连通的且没有断点，则称为不可断图。如果 G 至少具有一个断点，则称为可断的。图 1-18 为不可断图的一些例子，图 1-19 则为可断图的一些例子，其中图 a 的断点为 x_0，图 b、c 的断点为 v_1 和 v_2。

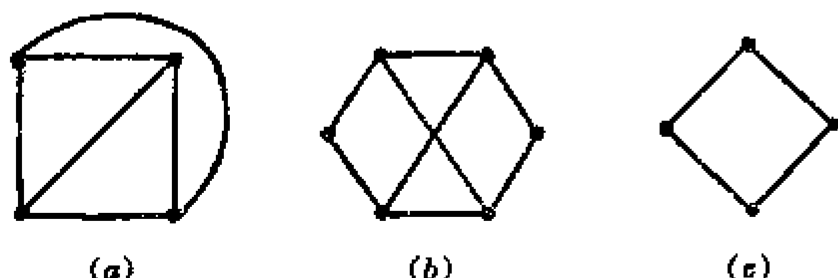


图 1-18　不可断图

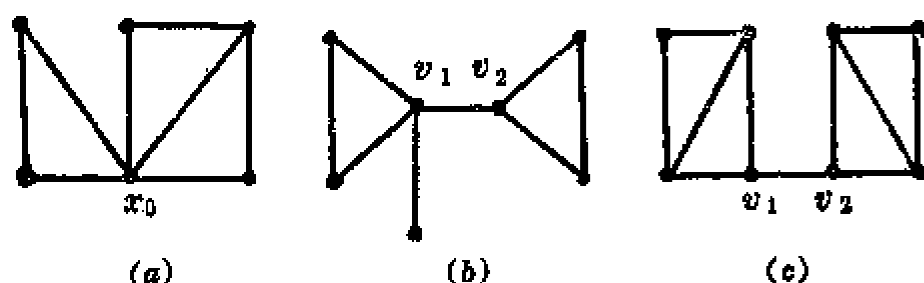


图 1-19　可断图

下面介绍有关断点的一个定理。

定理 1-6　在一个连通图里，顶点 x_0 是一个断点的必要和充分条件是存在一对顶点，所有联接这两个顶点的链都经过 x_0。

其证明如下。如果 x_0 是一个断点，把它移去后将使图至少分离为两个部分，任取其中一个部分的一个顶点和另一个部分的一个顶点，在原先的那个连通图里，每一联接这对顶点的链自然非经

过 x_0 不可。另一方面，若所有联接一对顶点的链都经过 x_0，则把 x_0 移去后，将使图不连通，故 x_0 是一断点。

在电路理论中，有时会碰到有关可断图的问题。当电路是由几个部分组成，且这些部分电路之间具有某一公共点，例如接零或接地，则描述这种电路的图将是一个可断图。

§1-10 平 面 图

一个几何图 G，如果能把它画在平面上，使其各边是简单曲线，且任意两边除端点外不再相交，这样的图称为平面图。

满足上述条件的图，称为拓扑平面图，两个拓扑平面图，若将平面经过弹性变形而仍能重合，则这两个图看做是相同的。同一图 G 可以画成相异的拓扑平面图。例如，图 1-20a 和 b 是同构的，但为相异的拓扑平面图。拓扑平面图有时就简称为平面图。

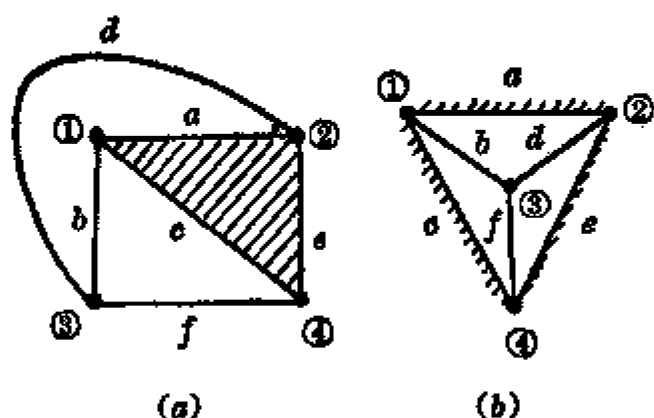


图 1-20 拓扑平面图

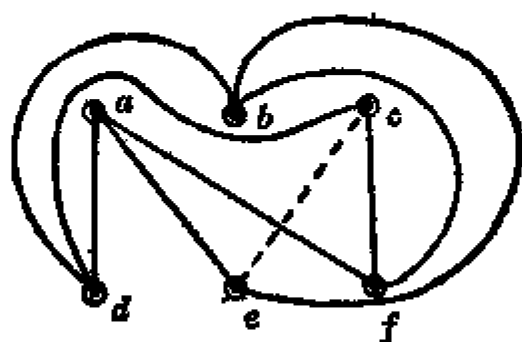


图 1-21 非平面图

一张地图是一个拓扑平面图。图 1-21 则为一个典型的非平面图，其中 a、b、c 可能表示三个宿舍，d、e、f 分别表示水站、煤气站和变电站。如果企图在平面上安排连接三个宿舍和三个站所需的管道，则经验指出，总能把八条管道安排得互不相交，但第九条管道必将与其他八条之一相交。

设 G 是一个平面图，图的边所包围的一个区域，其内既不含图的顶点，也不含图的边，这样的区域称为 G 的一个面，如图 1-20a

中用斜线所示的为一个面。一个面的周界就是包围该面的诸边所构成的回路，在电路理论中称之为网孔，因为它的形状与一个网的孔相似。平面图 G 外部的无限区域有时也把它当作一个面，称为无限面，平面图里总有一个且仅有一个无限面，其他的则都是有限面。无限面的周界也可以当作是一个网孔，称为外网孔。

若两个面的周界至少有一条公共的边，则这两个面为相邻的；如果两个面仅以一个顶点相接，这两个面是不相邻的。

图 1-22 表示一张地图，它是一个平面图，其中面 a 和面 b，面 e 和面 d 等相邻，但面 b 或面 d 和面 f 则不相邻。顶点 x_0 是一个断点。两个面有可能多次相邻。

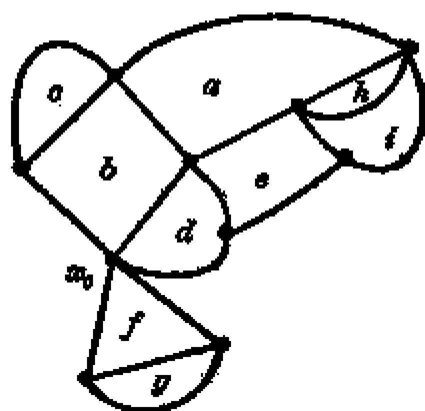


图 1-22　一张地图

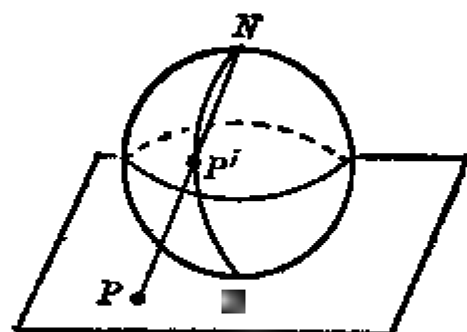


图 1-23　测地投影

一个画在平面上的图 G，可以通过“测地投影”把它映射到球面上。把球放置在平面上，并令接触点为球的南极 S，然后用直线把图 G 的任一点 P 与球的北极 N 联接（N 极作为投影中心），此直线与球面相交的点 P' 就是与 P 对应的点（见图 1-23）。图 G 的每一点都可以通过这种方法映射到球面上，这样获得的投影与图 G 为一一对应。反之，球面上的一个图也可以用相同的方法映射到平面上，不过北极 N 不能作为图上的一个点。

把一个画在平面上的平面图映射到球面上，所得的图，其任意两边除端点外不再相交；反之，在球面上这样的图，映射到平面上即为平面图。

平面图的任何有限面，总可以通过上述的两次映射，使之成为无限面。方法是：先把球的 S 极置于该有限面内任一点上，然后把平面图映射到球面上。把球的原来的 N 极转到原来的 S 极位置上，而令原来的 S 极为投射中心（即 N 极），把球面上的图再映射回到平面上。这样，该有限面就转化为无限面。图 1-20a 中用斜线划出的有限面，在图 1-20b 中则为无限面。

上述情况也可以用下述方法来形象地加以理解。一个平面图总可以画在球面上，设想球是透明的，从球的中心向其中任一个面往外观察，这个面就是在平面上所映射的图上的一个无限面。

在一个连通的平面图里，其顶点数 n_t、边数 b 和面数 f（无限面包括在内）之间存在着一个重要关系式，即下列公式（欧拉公式）成立：

$$n_t - b + f = 2$$

欧拉公式可用归纳法证明如下。如果用一条边去联接一个图的一个顶点和另一个顶点，且不与其他边相交，则 $(n_t - b + f)$ 保持不变，因为边数增加 1，但同时增加了一个新的面（见图 1-24 a 和 b）。同样，如果引进一个新的顶点，用两条边去联接此顶点与图的两个顶点，这样 n_t 增加 1，b 增加 2，f 增加 1（见图 1-24c），所以 $(n_t - b + f)$ 仍不变。如果不是去增加边数或顶点

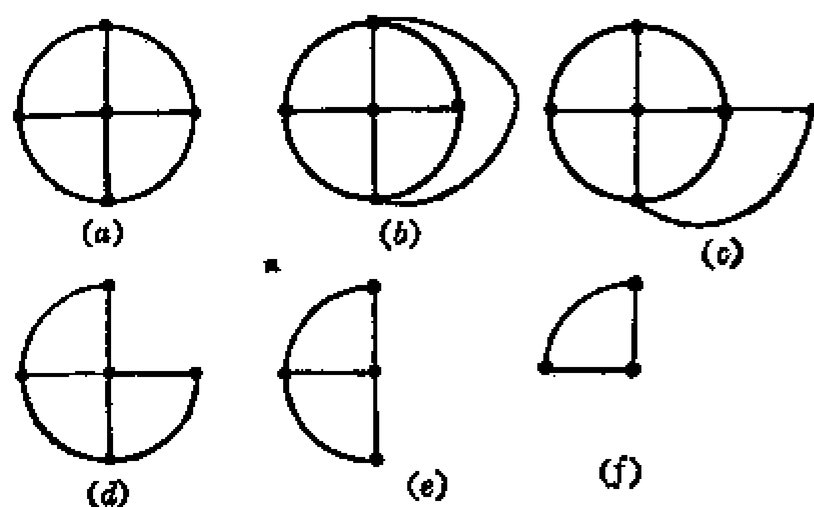


图 1-24　欧拉公式的证明

数，而是减少它们，则从图 1-24d 和 e 不难看出(n_t-b+f)依旧不变。如果反复运用以上过程，或增加，或去掉一些边和顶点，最终所得到的图将如图 1-24f 所示的三角形，其中 $n_t=3$, $b=3$, $f=2$（三角形外的无限面计算在内），则有 $n_t-b+f=2$。由此可见，欧拉公式是成立的。

如果令 m 等于平面图的网孔数（外网孔不计在内），则 m 应等于有限面数，故 $m=f-1$，因此有网孔数

$$m=b-n_t+1$$

以上公式是欧拉研究凸多面体时所得的结论；也就是对于一个顶点数为 n_t，边数为 b，面数为 f 的凸多面体，有 $n_t-b+f=2$。其实，一个凸多面体可在一个球面上表示出来，其任二边除端点外不再相交。在某一面里取一点，以此为中心，作一测地投影，这个凸面体便可在平面上表示出来，所得的将是一个相应的平面图。

本节开始时，曾指出图 1-21 所示为一个典型的非平面图。除此以外，另一个典型非平面图如图 1-25 所示，即具有五个顶点的完备图（一个图，如果每两个相异顶点相邻，即任一对相异顶点之间有一边相联，则称为完备图）。这两种典型非平面图分别称为第一种型式（图 1-25）和第二种型式（图 1-21）库拉图斯基图。库拉图斯基（Kuratowski）曾导出一个关于平面图的定理，大意是：图 G 是平面的，其必要和充分条件是 G 中不含有库拉图斯基图的第一种型式或第二种型式的子图。此定理之证明较难，有兴趣的读者可参阅书末所列参考书 1、5、9 等。

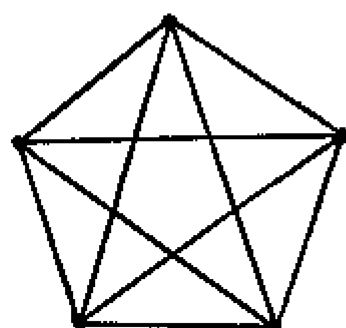


图 1-25　全五角形

下面介绍平面图的对偶图。设一个连通的平面图 G 具有 s 个面（包括无限面），并设它们为 r_i $(i=1,2,\cdots,s)$。在 G 的每个面中（无限面在内）置放一个点，令 r_i 中的点为 p_i。如果两个面 r_i、r_j

相邻，用一条边$[p_i, p_j]$联接p_i和p_j使它与面r_i、r_j的公共边只相交一次，且与图的其他周界无公共点。用这样的方法获得一个图G^*，其顶点为$p_1, p_2, \cdots, p_s$。图G^*称为G的对偶图。图1-26a示出了求一个图G的对偶图G^*的过程。G^*在a中用虚线示出，b中则另外画出了G^*。注意图G中的自环在G^*中成为一个悬挂的边(即其一个端点的次数为1)，而G中的一个悬挂边在G^*中成为一个自环。

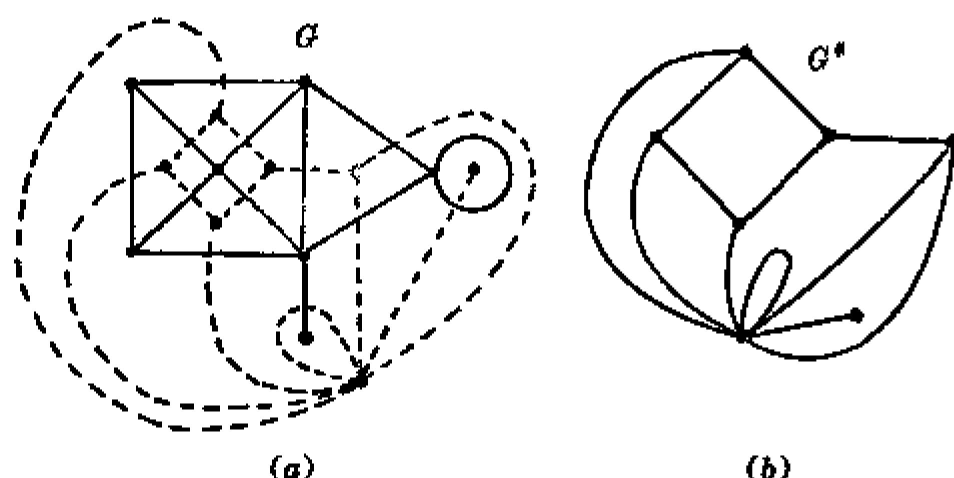


图1-26　对偶图

可见，一个连通的拓扑平面图G和它的对偶图G^*之间有如下的关系：

(1) G的面(或网孔)与G^*的顶点存在一一对应关系，

(2) G^*的面与G的顶点存在一一对应关系，

(3) 两个图的边之间有这样的一一对应关系，即当一个图中的两个面之间有一条对应边为公共边，则在另一个图中的对应边将联接与这两个面对应的顶点。

不难看出，G^*的对偶图是G。另外，G与G^*的圈数相等。

前面提到的地图着色问题，如用对偶图处理，就成为顶点的着色问题。通常所说的平面图的着色问题是指图的顶点着色，而地图的着色问题则指其面的着色。这两种说法其实是等价的。四色猜想是指每个平面图可用四种颜色着色，也即能否只用四种不同

颜色涂染平面图的顶点，使相邻顶点的颜色不同。

平面图的研究具有实用意义，例如单面印刷电路板和集成电路的布线都与平面图有关。

§1-11 有 向 图

有向图的特点是它的每一条边具有一定的方向，或者说是定向的。有时图的边必须伴有一定的方向，对几何图来说，就是经历一条边的具体方向，对抽象图来说，则是边所关联的两个端点应具有一定的次序关系。所以有向图与无向图在结构上的差别，仅在于边的顶点构成的偶对是有序的还是无序的。

应用图论研究具体问题时，往往由于两种原因，必须使图的边具有一定的方向。一种情况是在一对顶点之间的关系有时是不对称的，最简单的例子是城市道路系统中的单程道路。另外，例如在人一机对话中，人与机器交换信息过程中所使用的设备往往可能是单程的；时序电路中，从一个状态到另一状态的转换往往也具有方向性。又例如，用图来表示一个指挥系统中上级与下级之间的关系，就必须用有方向的边。这种方向可以说是一种真实方向，因为它表示所描述的物理系统的某种次序或单向性质。第二种情况则有所不同，这时赋予边一定的方向，其主要目的是为了描述某种参考系统，例如电路理论中，对支路的电流和电压应指定参考方向时就是如此；这种方向实质上是一种"伪方向"。本节介绍有向图的基本概念，但叙述将简略些。某些概念在以后用到时再予以补充。

有向图可以定义如下：有向图是由一个非空集合V和一个与V不相交的集合A，以及一个A在有序积$V\times V$里的映射Δ所组成。V和A的元素分别称为图的顶点和弧（或有向边），而Δ则称为与有向图有关的定向关联映射。如果$a\in A$，则$\Delta(a)=(v, w)$，其中

(v,w)为顶点 v 和 w 的有序偶(注意，前面用$[v,w]$表示 v 和 w 的无序偶)；如果映射Δ隐含时，通常 $\Delta(a)=(v,w)$ 可以简写为 $a=(v,w)$。v 称为弧 a 的起点，w 为弧 a 的终点。有向图用符号 D 来表示，这样可把 D 记为 $D=(V,A,\Delta)$ 或当Δ隐含时，$D=(V,A)$。有向图中弧 $a_1=(v,w)$ 和弧 $a_2=(w,v)$ 是完全不同的。

一个有向图可以用点和连续矢线在平面上画出来。把集合 V 里的元素用平面上的点来表示，如果两点 v 与 w 之间有 $\Delta(a)=(v,w)$，则自 v 到 w 作一连续矢线，偶对(v,w)就是图的一条弧，其起点为 v，终点为 w，箭头的方向自 v 指向 w。图 1-27 表示一个有向图 D。集合 V 是由顶点 x,y,z,v,w 等组成；集合 A 由弧(x,y)，(y,x)，(x,v)，(y,z)，(y,w)，(v,v)，(v,w)，(w,x)等所组成。

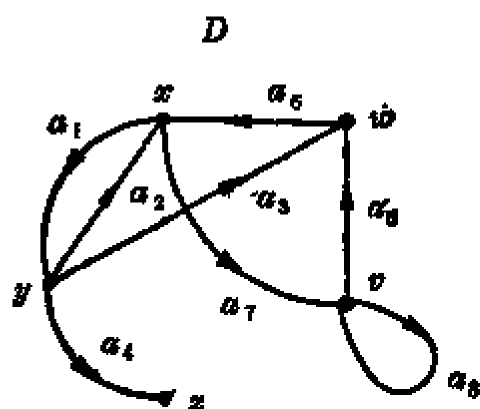


图 1-27　有向图

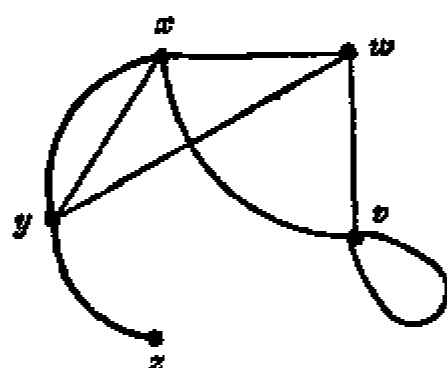


图 1-28　相伴无向图

给定一个有向图 $D=(V,A,\Delta)$，它的相伴无向图是 $G=(V,E,\sigma)$，其中关联映射定义如下：每当 $\Delta(a)=(v,w)$ 时，$\sigma(e)=[v,w]$。就是说，把 D 的每一条弧的端点的次序忽略后所得的图就是 G。有向图 D 在平面上画出后，它的相伴无向图 G，直观上来说，就是把 D 的箭头去掉后所获得的图。图 1-28 所示的就是图 1-27 的有向图的相伴无向图。

如果两条弧 a、b 不相同，但有一个共同的端点(不管它是 a 的终点或起点，或是 b 的终点或起点)，则称它们为相邻顶点。同样，如果两个顶点 v 和 w 是相异的，且有一条弧 a 与 v 和 w 关联(不管

$a=(w,v)$或是$a=(v,w)$),则这两个顶点称为相邻顶点。

设顶点v是弧a的起点,而弧a的终点w异于v,称弧a离开v,指向w,或弧a外向过v,内向过w。外向过顶点v的弧数称为v的正次数,用$\delta^+(v)$表示。内向过顶点v的弧数称为v的负次数,用$\delta^-(v)$表示。v的次数$\delta(v)$可写为

$$\delta(v)=\delta^+(v)+\delta^-(v)$$

例如,对图1-27的有向图来说,$\delta^+(x)=2$,$\delta^-(x)=2$,$\delta^+(y)=3$,$\delta^-(y)=1$;$\delta(x)=4$,$\delta(y)=4$。

如果$a_1=(v,w)$,$a_2=(v,w)$,则弧a_1和a_2称为严格并行;若$a_3=(w,v)$,则a_1、a_3为并行,但不是严格并行。

如果一个有向图里不存在严格并行弧和自环,则称为简单图。如果一个简单的有向图中存在两条并行的、但方向不同的弧,则它的相伴无向图是多重的,因为按无向图来说,有并行边存在。在简单的有向图中,由于只有一条弧按一定的方向联接两个顶点,因此它的每一条弧可以明确地用顶点的有序偶来表示。

在一个有向图里,n条弧$a_1, a_2, \cdots, a_n$,如果其中每一条弧的终点,恰好和紧接其后面那条弧的起点相合,这个弧的序列叫做有向链。例如图1-27中a_5, a_6, a_1, a_4构成一个有向链。如果有向链中同一条弧不用两次,就称为单纯有向链,否则是复杂的;如果其中每个顶点是相异的,就称为初级有向链。如果有向链的起点和终点重合,则称为闭合有向链。初级的有向链称为有向路。初级的闭合有向链称为有向回路。

显然,在有向图中上述弧的序列,在相伴无向图中将确定对应的边的序列;但反之则不然。例如,在图1-27中a_5, a_2, a_4在相伴的无向图中是一条链,但在有向图中则不构成对应的有向链,因为a_2的方向不符合。

通常,有向图的树和割集可以根据其相伴无向图来定义;如必

须计及方向，则需另加考虑。

在电路理论中用到的图，虽然是有向的，但是前面已指出，这种方向是“伪”的。因此，路，回路，树，割集等都是按照其相伴无向图来考虑的。

不过，在信号流图中，弧的方向则是“真实”的，所以应按有向图来考虑。

第二章　图的矩阵表示

§2-1 引　　言

图的关联性质，有顶点与边的，边与回路的，边与割集的，等等，都可以用矩阵形式来表示。这种表示方法适用于无向图，也适用于有向图。在电路理论中，由理想元件构成的电网络可以用一个图来表示，而由于为了便于确定电流和电压的正负，必须指定网络中各支路电流、电压的参考方向。这样，在相应的图中也将带有方向，于是得到一个有向图。但是，前面曾指出这种方向并不是"真实"方向，所以许多概念，如图的树、回路、割集等都按其相伴无向图来定义。不过，表示图的关联性质的矩阵是按有向图来定义的。

另外，为了遵循电路理论的习惯用法，在本章及下一章将用"节点"的名称来代替"顶点"，用"支路"来代替"边"(或"弧")。

为了简化讨论起见，本章主要考虑连通图，并假设图中没有自环。

本章讨论这些矩阵的性质，以及它们之间的相互关系，将会看到，树的概念在这里占有重要的地位。

§2-2 关联矩阵

图的节点(即顶点)和支路(即边或弧)的关联性质可以用一个矩阵 $\mathbf{A}_a$ 来表示。设有一个连通图 G，其节点数为 n_t，支路数为 b，$\mathbf{A}_a$ 将是一个 $n_t\times b$ 阶矩阵，其行对应于节点，其列对应于支路，而任一元素 a_{ij} 定义如下：

$a_{ij}=1$，如果支路 j 和节点 i 关联，且支路 j 的方向离开节

点 i；

$a_{ij}=-1$，如果支路 j 和节点 i 关联，且支路 j 的方向指向节点 i；

$a_{ij}=0$，如果支路 j 和节点 i 无关联。

矩阵 $\mathbf{A}_a$ 称为节点-支路关联矩阵，简称为关联矩阵。例如，对于图 2-1 所示的图 G，其节点数 $n_t=4$，支路数 $b=6$，节点和支路的编号及指向如图中所示；它的关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 为

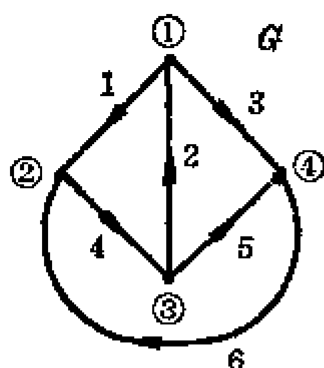


图 2-1　G 的关联矩阵

$$\mathbf{A}_a=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ ① & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ② & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ ③ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ ④ & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix} \tag{2-1}$$

显然，$\mathbf{A}_a$ 的每列含有一个 $+1$ 和一个 -1，而其余均为零，这是因为一条支路只与两个节点关联，当它离开其中一个节点，则必指向另一节点。因此，把 $\mathbf{A}_a$ 的全部行加起来将得一行全为零。就是说，$\mathbf{A}_a$ 的所有行不是线性独立的。由此可以得出一个连通图的关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的秩不会超过 n_t-1，n_t 为其节点数。

对于一个节点数为 n_t 的连通图 G，其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的任何 k 行（$k<n_t$）之和将至少包含一个非零元素。因为如果不是如此，把 $\mathbf{A}_a$ 的 k 行加起来，将是一行全为零。把这些行排在 $\mathbf{A}_a$ 的上部。由于把它们加起来得一行全为零，故 k 行中的每一列或全为零，或含一个 $+1$ 和一个 -1。置换 $\mathbf{A}_a$ 的列，使在前 k 行中那些含非零元素的列排在 $\mathbf{A}_a$ 的最前面。这样，$\mathbf{A}_a$ 必将具有下列形式：

$$\mathbf{A}_a=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

这是因为 $\mathbf{A}_a$ 的每一列含有且只含两个非零元素。可以看出在前面 k 个节点和后面的 n_t-k 个节点之间无共有元素，因而图是非连通的。但这与 G 是连通图的条件相矛盾。

现在可以明确矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的秩恰好是 n_t-1，即下列定理成立：

定理 2-1　一个节点数为 n_t 的连通图，其关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的秩为 $n=n_t-1$[①]。

此定理可直接证明如下：$\mathbf{A}_a$ 的秩不超过 n_t-1。把 $\mathbf{A}_a$ 的前 n_t-1 行与最后一行相加，结果使得最后一行全为零。第一行中至少应有一个非零元素。置换 $\mathbf{A}_a$ 的列，使此非零元素位于矩阵 $\mathbf{A}_a$ (1, 1) 的位置。设第一列中还有一个非零元素并位于第 j 行。把第一行与第 j 行相加，使此元素变为零；但是根据上面已证明的，第 j 行中应至少还有一个非零元素。第二行中有一个非零元素，且不在第一列中。把第二行中的这个非零元素按列置换到(2, 2)位置，然后按上述步骤同样处理，但由于相加的行数总少于 n_t，故不会产生一行全为零。这样继续下去，最后矩阵 $\mathbf{A}_a$ 可化为下列形式：

$$
\begin{bmatrix}
\pm1 & \times & \times & \times & \cdots & \times & \times \\
0 & \pm1 & \times & \times & \cdots & \times & \times \\
0 & 0 & \pm1 & \times & \cdots & \times & \times \\
0 & 0 & 0 & \pm1 & \cdots & \times & \times \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

式中，× 表示 0 或 ±1。由此得出一个 (n_t-1) 阶的方子矩阵，其主对角元素为非零值，因而是非奇异的。故 $\mathbf{A}_a$ 的秩为 n_t-1。

由于连通图 G 的秩 $\rho(G)$ 是 n_t-1，所以关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的秩也就是图 G 的秩 $\rho(G)$。

---

① 连通图的节点数设为 n_t，并总令 $n=n_t-1$。

在以上的证明过程中，所谓最后一行其实是可以任意的，所以把矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的任一行划去，所得的矩阵 $\mathbf{A}$，其秩仍为 n_t-1。划去行所对应的节点即所谓的参考节点。$\mathbf{A}$称为降阶关联矩阵。

不难理解，把矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的任一行划去后，所得的矩阵 $\mathbf{A}$，实质上包含了 $\mathbf{A}_a$ 的全部内容，因为所缺的一行是很容易补上的。今后，我们经常用的是降阶关联矩阵 $\mathbf{A}$，且简称之为关联矩阵。

关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的那些对应图 G 的一个回路的列是线性不独立的，可以证明如下：

设一个连通图 G 中任一个回路 L，其支路数为 k，并令 $\mathbf{A}_a$ 中的一个子矩阵$\mathbf{M}$是由 $\mathbf{A}_a$ 中对应回路 L 的那些列所构成。与回路 L 有关的节点恰好有两条支路与之关联，而任一条支路又只与两个节点关联，因此回路 L 的节点数一定等于其支路数；子矩阵$\mathbf{M}$中含有非零元素的行数是 k，而且它的每一列应当有一个 $+1$ 和一个 -1。可见子矩阵$\mathbf{M}$ 的秩最高不会超过$(k-1)$。换句话说 $\mathbf{M}$ 的列是线性不独立的。

举例来说，按图 2-1 和式(2 1)，支路 4、5、6 构成一个回路(有关的节点为②、③、④)，故 $\mathbf{A}_a$ 中对应此回路的子矩阵$\mathbf{M}$为

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

可见，$\mathbf{M}$的列是线性不独立的。

显然，这个结论对矩阵$\mathbf{A}$也是适用的。

下面介绍关联矩阵$\mathbf{A}$的一个重要性质。

定理 2 2 连通图 G 的关联矩阵$\mathbf{A}$的一个 $n\times n$ 阶($n=n_t-1$，n_t 为 G 的节点数)子矩阵是非奇异的必要和充分条件是：此子矩阵的列对应图 G 的一个树的树支。

证明如下：设此子矩阵为$\mathbf{T}$。如$\mathbf{T}$的列对应图G的一个树，由于树是一个连通图，故按定理 2-1，$\mathbf{T}$的秩为n。反之，如果$\mathbf{T}$是非奇异的，则它的n列将是线性独立的，所以与之对应的子图将不含回路，且其支路数是$n(=n_t-1)$，故此子图应当是一个树。

一个秩为n的$n\times m$阶矩阵$\mathbf{H}$的大子矩阵(Major submatrix)定义为$\mathbf{H}$的一个阶数为n的非奇异子矩阵。

由此可见，一个图的树与矩阵$\mathbf{A}$的大子矩阵有一一对应关系。这是一个非常基本的关系而且说明了树的重要性。

举例来说，图 2-1 的降阶关联矩阵$\mathbf{A}$可写为(划去$\mathbf{A}_a$的第四行)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

支路 1、2、3 为一个树，对应的子矩阵$\mathbf{T}$为

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

不难看出，$\mathbf{T}$是非奇异的。

§2-3 回 路 矩 阵

图G的回路与支路的关联性质可以用一个回路矩阵$\mathbf{B}_a$来描述，$\mathbf{B}_a$是$s\times b$阶，其中s为G的回路数，b为支路数。为了定义$\mathbf{B}_a$还需要指定各回路的方向。所谓回路的方向，是以回路所含节点的次序来确定的①。直观上，可以用一个箭头来表示回路的方向。回路的方向可以按需要任意选择。这样，$\mathbf{B}_a$的任一元素b_{ij}定义如下：

---

① 例如图 2-2 的第 4 回路的方向是由节点次序(1, 2, 3, 4)所确定。

$b_{ij}=1$，如果支路 j 在回路 i 中，且支路的方向与回路方向一致；①

$b_{ij}=-1$，如果支路 j 在回路 i 中，且支路的方向与回路方向相反；①

$b_{ij}=0$，如果支路 j 不在回路 i 中。

例如，对于图 2-1 的图 G 来说，把它重画于图 2-2 中，且示出了它的七个回路及其方向。因此，G 的回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 为

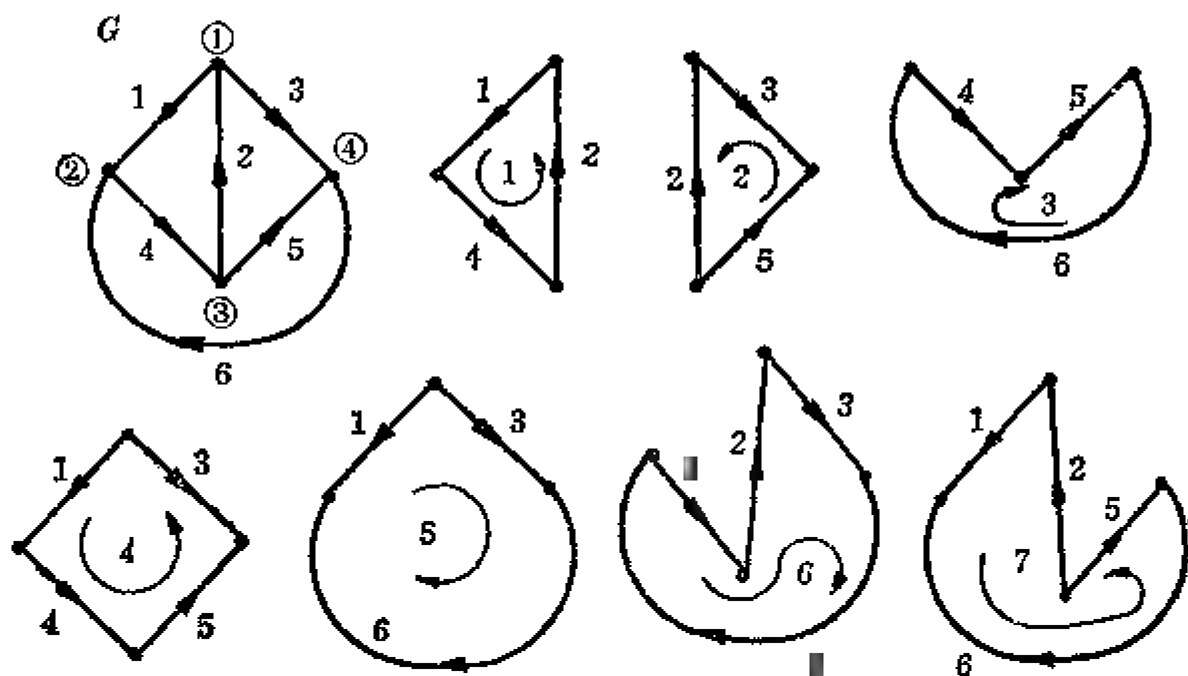


图 2-2　图 G 的七个回路

$$
\mathbf{B}_a=\begin{array}{c}\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\1&0&-1&1&1&0\\1&0&1&0&0&1\\0&1&1&1&0&1\\1&1&0&0&-1&-1\end{bmatrix}\end{array}\tag{2-2}
$$

① 这里所谓一致或相反，直观上是显然的。若要定义，则应按支路所关联节点的有序偶的次序与定义回路方向的节点次序是否一致来确定。

第一章提到的单连支或基本回路组(f 回路组)的回路矩阵具有一定的特殊形式。对一个具有 n_t 个节点和 b 个支路的连通图 G，选择 G 的一个树。按下列方法标号：把 $l=(b-n)$ 个连支依次标为 $1,2,\cdots,(b-n)$，令各单连支回路按对应连支标号，且选择回路的方向使之与对应的连支方向一致。令树支的标号依次为 $(b-n+1),(b-n+2),\cdots,b$。若把矩阵的行和列按上述回路和支路的标号排列，则 f-回路组的回路矩阵，用 $\mathbf{B}_f$ 表示时，将具有如下形式：

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{1} \mid \mathbf{B}_{12}]$$

式中 $\mathbf{1}$ 是 $l=(b-n)$ 阶的单位阵。例如，对于图 2-3 的图 G，选择支路 5、6、7、8 为树，则可写出其 f 回路矩阵：

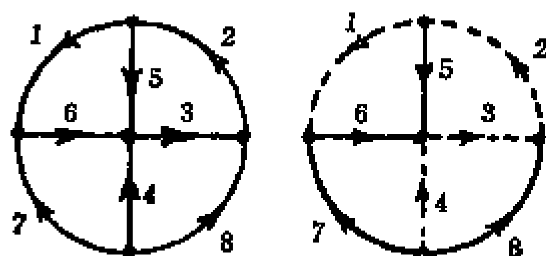


图 2-3 f 回路组

$$\mathbf{B}_f=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&-1&1&0&0\\0&1&0&0&1&-1&-1&1\\0&0&1&0&0&1&1&-1\\0&0&0&1&0&-1&-1&0\end{array}\right]\end{array}$$

显然，$\mathbf{B}_f$ 的秩为 $l=b-n$。同时，由于 f-回路一定是全部回路的一部分，因此 $\mathbf{B}_f$ 一定是回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的一个子矩阵。由此可见，一个具有 n_t 个节点和 b 个支路的连通图 G，其回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的秩至少不低于 $l(=b-n)$。

回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的秩最高也不超过 $(b-n)$。要证明这一点，必须先证明另外一个重要定理。

定理2-3 如果矩阵 $\mathbf{A}_a$ 和矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的列按相同的支路次序排列，则

$$\mathbf{A}_a\mathbf{B}_a^T=0 \quad 和 \quad \mathbf{B}_a\mathbf{A}_a^T=0$$

式中上标 T 表示转置。

设 $\mathbf{A}_a\mathbf{B}_a^T=\mathbf{C}$。令 a_{ij} 和 b_{ij} 分别为矩阵 $\mathbf{A}_a$ 和 $\mathbf{B}_a$ 的第 i 行，第 j 列元素，并注意 $\mathbf{B}_a^T$ 的第 j 列也就是 $\mathbf{B}_a$ 的第 j 行，则有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{b}a_{ik}b_{jk}$$

以下分两种情况来讨论：

(*a*) 如果回路 j 不含有节点 i，而支路 k 属于回路 j，则 $b_{jk}\neq 0$，但由于支路 k 与节点 i 不关联，故 $c_{ij}=0$。

(*b*) 如果回路 j 含有节点 i，则恰好有两条支路 b_g, b_h 与节点 i 关联，也即在 $\mathbf{A}_a$ 的第 i 行中将含有两个非零元素 a_{ig}, a_{ih}，而在 $\mathbf{B}_a$ 中第 j 行的对应非零元素将是 b_{jg}, b_{jh}；在 c_{ij} 中的其余项都是零。这样，有

$$c_{ij}=a_{ig}b_{jg}+a_{ih}b_{jh}$$

回路 j 中两条支路 b_g, b_h 和节点 i 关联的情况共有八种可能性，图 2-4 中示出其中的四种，其余四种则把回路 j 反向后就可以获得。

按图 2-4*a* 的情况，将有 $a_{ig}=1, a_{ih}=-1, b_{jg}=1, b_{jh}=-1$，因此 $c_{ij}=0$。对其余七种情况，都不难证实 $c_{ij}=0$。因此，$\mathbf{A}_a\mathbf{B}_a^T=0$

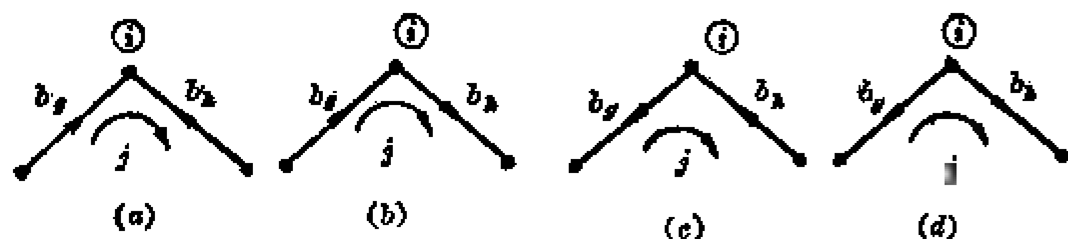


图 2-4 四种关联的情况

按矩阵的乘法规则，$(\mathbf{A}_a\mathbf{B}_a^T)^T=(\mathbf{B}_a^T)^T\mathbf{A}_a^T=\mathbf{B}_a\mathbf{A}_a^T$，故有 $\mathbf{B}_a\mathbf{A}_a^T\quad \mathbf{0}$。于是定理 2-3 得证。

作为例子，考虑图 2-1 和图 2-2 所示的图，其 $\mathbf{A}_a$ 和 $\mathbf{B}_a$ 分别由式(2-1) 和 (2-2) 给出（其中支路标号已按相同次序排列）。不难验证

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{0}$$

定理 2-3 是一个基本定理，它的重要性在以后的叙述中将会更明显。现在利用此定理来证明回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的秩为$(b-n)$，即定理 2-4。

定理 2-4　对于一个连通图 G，回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的秩为 $l\quad b-n$，其中 b 为G 的支路数，$n=n_t-1$，n_t 为G 的节点数。

要证明这个定理，还需要用到关于矩阵的秩的一个定理，即西勒维斯特(Sylvester)定理[1]，其内容为：如果矩阵$\mathbf{P}$ 为 $r\times s$ 阶，$\mathbf{Q}$ 为 $s\times t$ 阶，且$\mathbf{PQ}\quad 0$，则

$$(\mathbf{P}\text{ 的秩})+(\mathbf{Q}\text{的秩})\leqslant s$$

前面已证明回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 的秩$\geqslant\ l\quad b-n$。但是 $\mathbf{A}_a\mathbf{B}_a^T=\mathbf{0}$，$\mathbf{A}_a$ 的秩为 n，按西勒维斯特定理，有

$$(\mathbf{A}_a\text{ 的秩})+(\mathbf{B}_a\text{ 的秩})\leqslant b$$

故

$$(\mathbf{B}_a\text{ 的秩})\leqslant b-n$$

这样 $\mathbf{B}_a$ 的秩只能等于 l。

---

① 此定理的证明可参阅有关矩阵理论的著作。

由于 $\mathbf{B}_a$ 的秩是 l，因此没有必要把 $\mathbf{B}_a$ 的全部行都写出来。所以，今后我们用符号 $\mathbf{B}$ 来表示连通图 G 的 $\mathbf{B}_a$ 的一个 $l\times b$ 阶且秩为 l 的子矩阵，矩阵 $\mathbf{B}$ 称为 G 的回路基矩阵，因为它包含了 $\mathbf{B}_a$ 的全部内容。显然，f-回路矩阵 $\mathbf{B}_f$ 是 G 的一个回路基矩阵。

由于 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}_f$ 都是 $\mathbf{B}_a$ 的基矩阵，所以必然存在一个元素为 1、-1 和 0 的 $l\times l$ 阶非奇异矩阵 $\mathbf{C}$，使得 $\mathbf{B}=\mathbf{C}\mathbf{B}_f$。

任选连通图 G 的一个树，对应此树的连支集合称为 G 的一个补树(co tree)。这样，有下列定理：

定理 2-5 连通图 G 的回路基矩阵 $\mathbf{B}$ 的一个 $l\times l$ 阶子矩阵是一个大子矩阵的必要和充分条件为：此子矩阵的列与 G 的一个补树的支路对应。

先证明其必要性。置换 $\mathbf{B}$ 的各列(必要时)使 $\mathbf{B}$ 中前面的 l 列构成一个大子矩阵。把 $\mathbf{B}$ 分块如下：

$$\mathbf{B}=[\mathbf{B}_{11}\quad \mathbf{B}_{12}]$$

其中 $\mathbf{B}_{11}$ 为 l 阶且为非奇异的。这样 $\mathbf{B}_{12}$ 的列数将是 $b-l=n$。所以要证明定理 2-5 的必要性，只要证明 $\mathbf{B}_{12}$ 各列所对应的支路，它们构成的子图中不包含任何回路。如果不是如此，令回路矩阵 $\mathbf{B}_a$ 中的任一行 $\mathbf{B}_i$ 对应此回路，然后把 $\mathbf{B}_a$ 中包含 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{B}_i$ 各行的子矩阵写为：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{B}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ 0 & \mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

其中在 $\mathbf{B}_{22}$ 中至少应有一个非零元素。由于 $\mathbf{B}_{11}$ 是非奇异的，所以上列矩阵的秩将是$(l+1)$；但是这个矩阵是 $\mathbf{B}_a$ 的一个子矩阵，而 $\mathbf{B}_a$ 的秩是 l，这是不可能的。

要证明充分性，则令 $\mathbf{B}$ 中一个子矩阵与图 G 的一个补树对应。设 $\mathbf{B}_f$ 是由这个补树的各个连支所构成的 f 回路矩阵。置换矩阵 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}_f$ 的各列(必要时)使它们分别分块如下：

$$\mathbf{B}=[\mathbf{B}_{11} \quad \mathbf{B}_{12}]$$

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{1} \quad \mathbf{B}_{f12}]$$

由于$\mathbf{B}_f$是G的一个回路基矩阵，而$\mathbf{B}$的秩又为l，故存在一个非奇异矩阵$\mathbf{C}$使得

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}\mathbf{B}_f$$

这样有 $$[\mathbf{B}_{11} \quad \mathbf{B}_{12}]=\mathbf{C}[\mathbf{1} \quad \mathbf{B}_{f12}]$$

由此得 $$\mathbf{B}_{11}=\mathbf{C}\mathbf{1}=\mathbf{C}$$

因而$\mathbf{B}_{11}$是非奇异的。

可见，图G的补树与回路基矩阵$\mathbf{B}$的大子矩阵之间存在着一一对应的关系。

例如，对于图2-2来说，如以支路1、2、3为一个树T_1，支路4、5、6为其补树，由回路1、2、6构成的回路基矩阵$\mathbf{B}$，如置换其列后，将有

$$\mathbf{B}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可见$\mathbf{B}_{11}$是非奇异的。

如按树T_1写出f-回路矩阵（置换其列后），则有

$$\mathbf{B}_f=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

容易看出$\mathbf{B}=\mathbf{C}\mathbf{B}_f$，其中$\mathbf{C}$等于上面的$\mathbf{B}_{11}$。

如选其他任何补树，不难验证定理2-5总是正确的。

一个图G的关联矩阵$\mathbf{A}$可以用来描述G的全部特征，因此回路矩阵和关联矩阵之间存在一定的联系是不奇怪的。下面将说明这一点。

设有一个节点数为n_t，支路数为b的连通图G，任选G的一个树T，按T定义其f-回路组。写出G的关联矩阵$\mathbf{A}$及f-回路矩阵$\mathbf{B}_f$，置换其各列，使之先后按连支，树支次序排列，即令$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{11} \quad \mathbf{A}_{12}]$(注意，其中$\mathbf{A}_{12}$是非奇异的)，$\mathbf{B}_f=[\mathbf{1} \quad \mathbf{B}_{f12}]$，则$f$-回路矩阵$\mathbf{B}_f$可表示为

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{1} \quad -\mathbf{A}_{11}^T(\mathbf{A}_{12}^{-1})^T]$$

或

$$\mathbf{B}_{f12}=-\mathbf{A}_{11}^T(\mathbf{A}_{12}^{-1})^T$$

其证明如下：由于 $\mathbf{A}\mathbf{B}_f^T=\mathbf{0}$

故有

$$\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{f12}^T=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}_{f12}^T=-\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}$$

$$\mathbf{B}_{f12}=-\mathbf{A}_{11}^T(\mathbf{A}_{12}^{-1})^T$$

为了验证上列关系式，以图2-2为例。如选支路集合(1,2,3)为树T，把$\mathbf{A}$置换后，有

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

对应树T的$\mathbf{B}_f$为

$$\mathbf{B}_f=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

现在

$$\mathbf{A}_{l1}^{T}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}_{12}^{-1})^{T}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

而

$$\mathbf{A}_{l1}^{T}(\mathbf{A}_{12}^{-1})^{T}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=-\mathbf{B}_{f12}$$

可见从关联矩阵$\mathbf{A}$可以得出$\mathbf{B}_f$，但是在计算过程中需要求出$\mathbf{A}_{12}^{-1}$，即有一次矩阵求逆的运算。

§2-4 割集矩阵

连通图G的割集和支路的关联性质可以用一个割集矩阵$\mathbf{Q}_a$来描述，$\mathbf{Q}_a$是$q\times b$阶，其中q为G的割集数，b为支路数。

为了定义割集矩阵，需要指定割集的方向。对连通图G来说，它的一个割集把G的节点分为两个互不相交的集合W，W'，割集的定向是以节点集合W，W'的有序偶是(W, W')或(W', W)来确定的。如果一个割集C是按(W, W')来定向的，则C的一个支路(m, n)，当其节点m在W中，n在W'中，该支路的方向就与C的为一致，否则就是相反。

直观上，割集的方向可以用一个箭头来表示。例如，在图2-5中，虚线表示确定割集的周界，割集的方向则可用箭头来表示。但是在某些情况下，除非把G重画，就有可能做不到这一点(见图1-14)。图2-5中支路集合(1, 3, 4, 5)构成的割集，其方向是按节点集合$W=$(①，③)和$W'=$(②，④)的有序偶来确定的。通常，支

路的方向与割集方向是一致还是相反可以从图中直接加以确定，例如图2-5中，支路1与割集1的方向相反，而与割集2的方向一致。

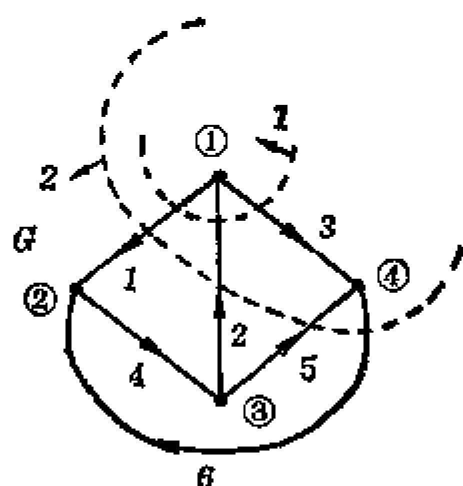


图2-5　割集的方向

有了割集的方向，连通图G的割集矩阵$\mathbf{Q}_a$的任一元素q_{ij}定义如下：

$q_{ij}=1$，如果支路j在割集i中，且支路的方向与割集的方向一致；

$q_{ij}=-1$，如果支路j在割集i中，且支路的方向与割集的方向相反；

$q_{ij}=0$，如果支路j不在割集i中。

对于图2-5所示的图G（即图2-1，2-2的G），它共有七个割集，如图2-6所示，各割集的方向也在图中标出，其中割集7的方向由节点集合(①，③)指向节点集合(②，④)。

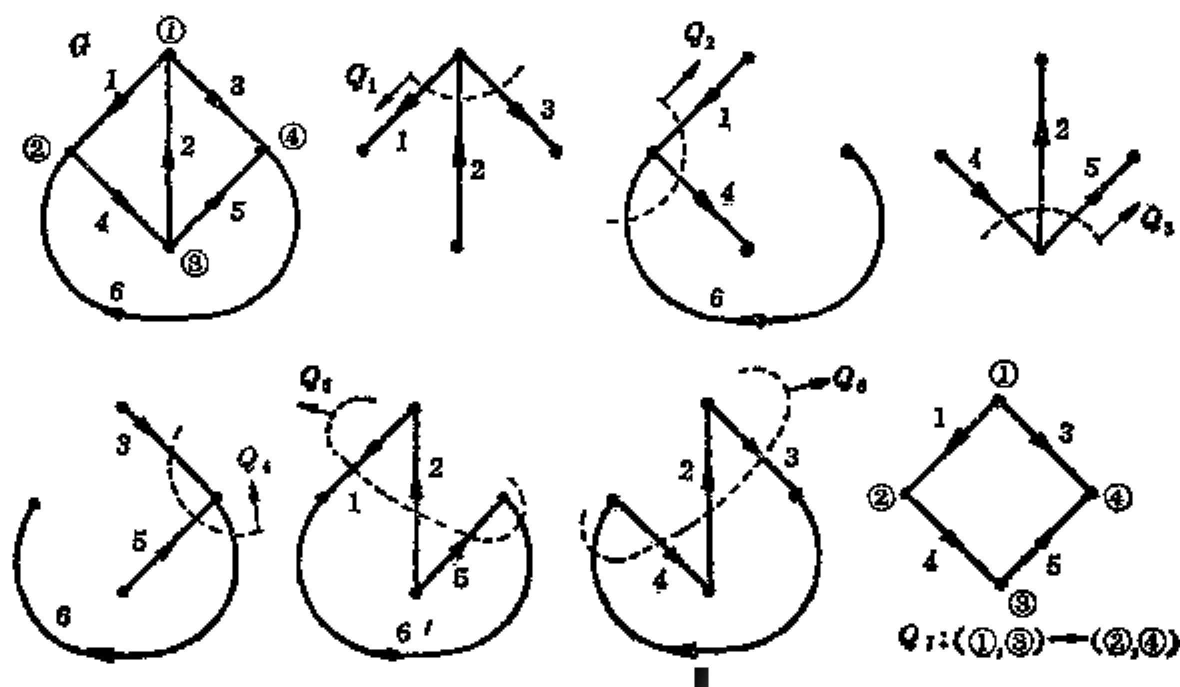


图2-6　图G的七个割集

此图的割集矩阵$\mathbf{Q}_a$将为

$$
Q_a = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right] \end{array}
$$

不难看出 Q_a 的行不是独立的，就是说这七个割集不是独立的。

只要连通图是不可断图，则与一个节点关联的支路集合将是一个割集(见 § 1 8)，可见 Q_a 中应包含关联矩阵 A_a(其中某些行的元素可能会相差一个符号)，即 A_a 是 Q_a 的一个子矩阵，所以 Q_a 的秩至少不低于 n。例如，上列的 Q_a 中，前面的四行就是图 G 的 A_a(第四行非零元素应全部改号)。

矩阵 Q_a 的秩就是 n，也就是 A_a 的秩。在证明这点之前，先介绍 Q_a 与 B_a 之间的一个重要关系式，即定理 2-6。

定理 2-6 当一个连通图 G 的回路矩阵 B_a 和割集矩阵 Q_a 的各列按相同编号排列时，则有

$$
Q_a B_a^T = 0 \quad 和 \quad B_a Q_a^T = 0
$$

按定理 1-5， G 的每一回路与每一割集共有的支路数为偶数(包括零)。不难看出，如果割集 i 与回路 j 含有 $2k$ 个公共支路，那末其中有 k 个支路相对于割集和回路的方向为一致时，另外 k 个支路必将在割集中有一个方向而在回路中有相反的方向，见图2-7。因此此定理的证明将与定理 2-3 的证明完全类似，这里不再重复。

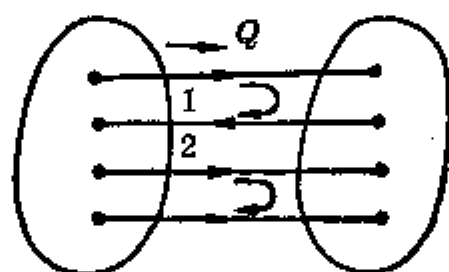


图 2-7 支路的方向与割集和回路方向之间关系

由于 $\mathbf{B}_a$ 的秩是 $l=b-n$，而 $\mathbf{B}_a\mathbf{Q}_a^T=0$，因此 $\mathbf{Q}_a$ 的秩最高不会超过 n。由此，得下列定理：

定理 2-7 具有 n_t 个节点和 b 个支路的连通图 G，它的割集矩阵 $\mathbf{Q}_a$ 的秩是 n。

由于 $\mathbf{Q}_a$ 的秩是 n，因此没有必要把 $\mathbf{Q}_a$ 的全部行都写出来。今后用符号 $\mathbf{Q}$ 来表示连通图 G 的 $\mathbf{Q}_a$ 的一个 $n\times b$ 阶且秩为 n 的子矩阵，矩阵 $\mathbf{Q}$ 称为 G 的割集基矩阵，因为它包含了 $\mathbf{Q}_a$ 的全部内容。如果选择 G 的一个树 T，T 的每一个树支定义一个单树支割集或 f-割集，这样，对应 n 个树支一共有 n 个 f-割集。f-割集的方向与定义它的树支方向取为一致。按 f-割集组写出的 f-割集矩阵将是 $n\times b$ 阶，并用符号 $\mathbf{Q}_f$ 来表示。$\mathbf{Q}_f$ 一定是 $\mathbf{Q}_a$ 的一个子矩阵，显然 $\mathbf{Q}_f$ 的秩就是 n，所以 $\mathbf{Q}_f$ 是 G 的割集基矩阵。

如果把图 G 的一个 f-割集矩阵的各列，依次按先连支，后树支予以置换，则像 f-回路矩阵一样，此 f-割集矩阵可以分块为

$$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{Q}_{f11} \mid \mathbf{1}]$$

其中 $\mathbf{Q}_{f11}$ 为 $n\times l$ 阶，而 $\mathbf{1}$ 为 $n\times n$ 阶。

例如，对于图 2-6 的图 G，如选支路 1、4、5 为树 T，则相应的 f-割集矩阵(其列经置换后)

$$\mathbf{Q}_f=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}$$

如对同一树 T，写出其 f-回路矩阵，将有

$$\mathbf{B}_f=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\end{array}$$

不难验证 $\mathbf{Q}_f\mathbf{B}_f^T = \mathbf{0}$。

由于 $\mathbf{Q}_f$ 和 $\mathbf{Q}$ 都是 $\mathbf{Q}_a$ 的一个秩为 n 的子矩阵，因而必然存在一个阶数为 n，元素为 1，1 和 0 的非奇异矩阵 $\mathbf{D}$，使得

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{Q}_f$$

同理，可以得出

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{A}$$

其中 $\mathbf{A}$ 为 G 的关联矩阵。

不难得出下列定理：

定理 2-8 对于一个具有 n_t 个节点的连通图 G，如果 $\mathbf{Q}$ 是 G 的一个具有 n 行且秩为 n 的割集矩阵，则 $\mathbf{Q}$ 的一个大子矩阵与 G 的树具有一一对应关系。

由于 $\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{A}$，$\mathbf{D}$ 是一个 n 阶的非奇异矩阵，按定理 2-2 可立即证明定理 2-8 是正确的。

如果选择连通图 G 的一个树 T，并按 T 定义 $\mathbf{B}_f$ 和 $\mathbf{Q}_f$，且把 $\mathbf{A}, \mathbf{B}_f, \mathbf{Q}_f$ 的列按相同支路标号且按先连支，后树支的次序排列，使得

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{11} \quad \mathbf{A}_{12}] \qquad \mathbf{B}_f = [\mathbf{1} \quad \mathbf{B}_{f12}]$$

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_{f11} \quad \mathbf{1}]$$

则下列关系式成立：

$$\mathbf{Q}_{f11} = \mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}$$

$$\mathbf{Q}_{f11} = -\mathbf{B}_{f12}^T$$

证明是不难的，因为 $\mathbf{Q}_f\mathbf{B}_f^T = \mathbf{0}$ （定理 2-6)，即

$$[\mathbf{Q}_{f11} \quad \mathbf{1}]\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{B}_{f12}^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

故有 $\qquad \mathbf{Q}_{f11} = \mathbf{B}_{f12}^T$

但是 $\qquad \mathbf{B}_{f12}^T = -\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}$

$$\mathbf{Q}_{f\,11}=\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}$$

可见，如果已知 $\mathbf{B}_f=[\mathbf{1}\quad \mathbf{B}_{f\,12}]$，则$\mathbf{Q}_f=[-\mathbf{B}_{f\,12}^T\quad \mathbf{1}]$。其实，这个关系式恰好是定理 1-4 的说明，即由一个树支确定的 f- 割集应恰好包含那些连支，每一这种连支所构成的 f- 回路中含有该树支。例如，对于图 2-3 来说，以其中所选的树(5,6,7,8)为基础的 f- 割集矩阵为

$$\mathbf{Q}_f=\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

与式(2-3)比较，不难验证 $\mathbf{Q}_{f\,11}=-\mathbf{B}_{f\,12}^T$。

总结以上所述，可见，若 $\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{11}\quad \mathbf{A}_{12}]$，则有

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{1}\quad -\mathbf{A}_{11}^T(\mathbf{A}_{12}^{-1})^T]$$

及

$$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}\quad \mathbf{1}]=\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}$$

这些关系式中用到了 $\mathbf{A}_{12}^{-1}$。下一节将介绍求 $\mathbf{A}_{12}^{-1}$ 的一种方法。

§2-5 节点-参考路径矩阵

对于一个具有 n_t 个节点的树 T，如以其中一个节点 v_0 为参考节点，从 T 的任一节点到参考节点 v_0 的路与各树支的关系可以用一个矩阵 $\mathbf{P}$ 来描述，$\mathbf{P}$ 称为对应参考节点 v_0 的节点-参考路径矩阵，简称为路径矩阵。矩阵 $\mathbf{P}$ 是 $n\times n$ 阶，其元素 p_{ij} 定义为

$p_{ij}=1$，如果在节点 j 和 v_0 之间的(唯一)路中含有树支 b_i，且 b_i 在路中的方向指向 v_0；

$p_{ij}=-1$，如果在节点 j 和 v_0 之间的(唯一)路中含有树支 b_i，且 b_i 在路中的方向背离 v_0；

$p_{ij}=0$，如果在节点 j 和 v_0 之间的(唯一)路中不含有树支 b_i。

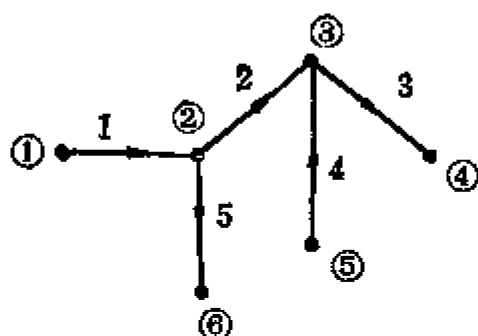


图 2-8 树 T 的路径矩阵 $\mathbf{P}$

例如，对于图 2-8 所示的树 T，若以节点⑥为参考，则 T 的节点-参考路径矩阵 $\mathbf{P}$ 为

$$
\mathbf{P}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

不难证明路径矩阵 $\mathbf{P}$ 的任一行的非零元素应同号。设 b_k 为树 T 的任一支路。把 b_k 移去，将使 T 的节点分离为两个集合 V_1 和 V_2。令参考节点 v_0 在 V_2 中。当且仅当节点 j 在 V_1 中，路径矩阵 $\mathbf{P}$ 的元素 p_{kj} 将是非零的。由于从 V_1 起始的任一条路通过 b_k 时的相对方向将是相同的，因而 $\mathbf{P}$ 中第 k 行的非零元素为同号。

路径矩阵 $\mathbf{P}$ 与关联矩阵 $\mathbf{A}$ 的大子矩阵之间存在着密切的关系。对于一个连通图 G，以 v_0 为参考节点，写出关联矩阵 $\mathbf{A}$。任选 G 的一个树 T，矩阵 $\mathbf{A}$ 中，对应 T 的列构成的子矩阵 $\mathbf{A}_{12}$ 是非奇异的。若以 v_0 为参考节点，写出 T 的路径矩阵 $\mathbf{P}$，则可以证明 $\mathbf{P}=\mathbf{A}_{12}^{-1}$。

要证明 $\mathbf{P}=\mathbf{A}_{12}^{-1}$，也即 $\mathbf{PA}_{12}=\mathbf{1}$，就是要证明：

$$
\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}a_{jk} &= 1, \qquad 当\ i=k \\ &= 0, \qquad 当\ i\neq k \end{aligned}\right\} i,k=1,2,\cdots,n
$$

若树 T 的任一树支 b_k 所关联的两个节点为 x 和 y，则上式变为

$$p_{ix}a_{xk}+p_{iy}a_{yk}=1,\quad \text{当 } i=k \\ =0,\quad \text{当 } i\neq k \Big\} i,k=1,2,\cdots,n$$

树支 b_k 把树 T 的节点分离为两个集合 V_1 和 V_2。树 T 的另一树支 b_i 关联的两个节点将都在 V_1 中，或都在 V_2 中；因此，当 $i\neq k$ 时，p_{ix} 和 p_{iy} 将同时为零值或同时为非零值(见图 2 9)。前面已证明 p_{ix} 和 p_{iy} 为同号，但 a_{xk} 和 a_{yk} 则为异号，因而当 $i\neq k$ 时，有

$$p_{ix}a_{xk}+p_{iy}a_{yk}=0$$

如果 $i=k$，则有两种可能情况：$p_{kx}=0$ 和 $p_{kx}=\pm1$。当从节点 x 的路中不含 b_k 时，$p_{kx}=0$，则从节点 y 的路中必含 b_k，所以这时 $p_{ky}=\pm1$。若 b_k 背离节点 y，$p_{ky}=+1$，$a_{yk}=+1$；同理，$p_{ky}=-1$ 时，$a_{yk}=-1$。当从节点 x 的路中含有 b_k 时，则从节点 y 的路中必不含b_k，故 $p_{kx}=\pm1$ 时，$p_{ky}=0$，同时 $a_{xk}=\pm1$。这样，当 $i=k$ 时，总有

$$p_{kx}a_{xk}+p_{ky}a_{yk}=1$$

可见 $\mathbf{P}=\mathbf{A}_{12}^{-1}$ 是正确的。

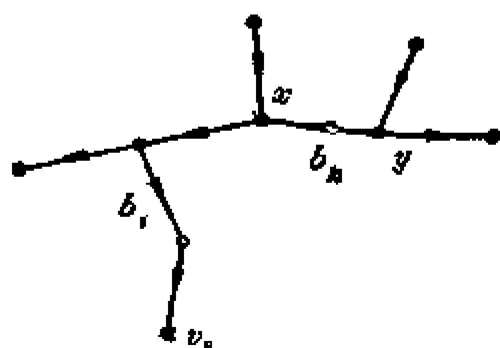


图 2 9 p_{ij}, a_{jk} 的符号的确定

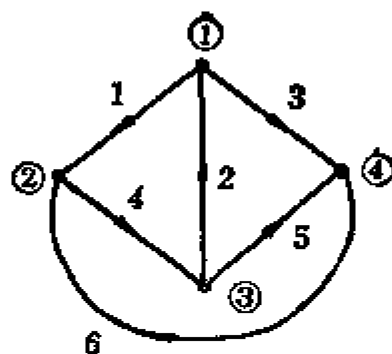


图 2-10 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{A}_{12}^{-1}$ 的关系

例如，若以图 2-2 的图 G 的支路(1,2,3)为树 T，并以节点④为参考(图 G 重画于图 2-10)，则相应的关联矩阵 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A}=\begin{matrix} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{matrix}\begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

（列依次为支路 4 5 6 ⋮ 1 2 3）

现在

$$
\mathbf{P}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_{12}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

可见，$\mathbf{P}=\mathbf{A}_{12}^{-1}$。

利用路径矩阵P可以直接求出关联矩阵A中的大子矩阵$\mathbf{A}_{12}$的逆阵$\mathbf{A}_{12}^{-1}$，而不必进行矩阵的求逆运算。

第三章 电网络方程

§3-1 电网络方程

电网络方程通常用电流和电压作为变量。分析电网络的依据是基尔霍夫的电流定律和电压定律。基尔霍夫电流定律(KCL)说明：汇集在电网络的一个节点上的支路电流的代数和恒等于零；KCL 还可以推广到任一个闭合面，即通过任一闭合面的电流的代数和恒等于零。基尔霍夫电压定律（KVL）说明：网络中任一回路内，支路电压的代数和恒等于零。这两个定律只与网络的拓扑性质有关，而与支路的内容，也即一个支路是由那些元件构成的情况无关。因此任一个电网络可以用一个相应的图来表示。由于电流和电压一般是时间的函数，且可能随时间反复不断地改变方向，所以有必要指定电流和电压的参考方向以便确定电流、电压值的正和负。通常，参考方向是可以任意指定的，同时习惯上还让电压和电流的参考方向选为一致，即如果用箭头表示电流的参考方向，则箭头的尾部将是电压的正参考极性。在网络的图中，支路的方向也即电流的参考方向。所以如果某一支路 $b_k=(v,w)$，则当电流 $i_k(t)$从节点 v 流向节点 w 时，i_k 为正值；同理，当电压 $u_k(t)$ 为正值时，节点 v 的电位高于节点 w 的电位。

支路电流 $i_k(t)$和支路电压$u_k(t)$之间的关系决定于支路的内容，就是说，支路中含有的电路元件性质确定了两者之间的关系。

若一个电网络是用一个具有 b 个支路，n_t 个节点的有向连通图[①] G 来表示的，写出 G 的关联矩阵 $\mathbf{A}_a$ 和回路矩阵$\mathbf{B}_a$，并用 b 阶

---

① 非连通图的情况可以仿照连通图对各部分分别予以处理，或者可以把各部分的一个节点联在一起而按连通图处理。

列向量 $\mathbf{i}_b$、$\mathbf{u}_b$ 来分别表示 b 个支路电流和支路电压。这样，对于各节点，KCL 可以用下列矩阵形式来表达：

$$\mathbf{A}_a\mathbf{i}_b=\mathbf{0}$$

由于 $\mathbf{A}_a$ 的秩是 n，所以上式不是独立的，可以把它改写为

$$\mathbf{A}\mathbf{i}_b=\mathbf{0} \qquad (3\text{-}1)$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{A}_a$ 的降阶关联矩阵，划去的行所对应的节点是参考节点。例如，以图 3-1 所示的电网络的图为例，如以节点 ④ 为参考，则降阶关联矩阵为

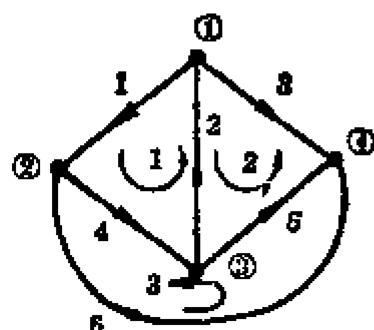


图 3-1　电网络的图

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

不难看出，

$$\mathbf{A}\mathbf{i}_b=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ \vdots \\ i_{b6} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} i_{b1}-i_{b2}+i_{b3} \\ -i_{b1}+i_{b4}-i_{b6} \\ i_{b2}-i_{b4}+i_{b5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

恰好是 KCL 在节点 ①、②、③ 的关系式。

由于 $\mathbf{A}$ 的秩是 n，所以式(3-1)是一组阶数为 n 的独立齐次线性代数方程。

同样，对于各回路，KVL 可以用下列矩阵形式来表达：

$$\mathbf{B}_a\mathbf{u}_b=\mathbf{0}$$

由于 $\mathbf{B}_a$ 的秩是 $b-n$　l，所以上式不是独立的，可以把它改写为

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_b = 0 \tag{3-2}$$

其中 B 为图 G 的回路基矩阵。如以图 3-1 所示的回路，则有

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

不难看出

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_b=\begin{bmatrix} u_{b1}+u_{b2}+u_{b4} \\ -u_{b2}-u_{b3}+u_{b5} \\ -u_{b4}-u_{b5}-u_{b6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

恰好是 KVL 在这些回路的关系式。

由于 B 的秩是 l，所以式(3-2)是一组阶数为 l 的独立齐次线性代数方程。这样，有 $n+l=b$ 个独立方程。另外，按各支路含有的元件性质，还可以写出 b 个支路电流和支路电压的关系式。所以，未知量为 $2b$ 个，一共有 $2b$ 个独立方程。这种方法虽然直接，但是方程数目太多，所以如何减少方程的数目是下面要讨论的问题。

由于关联矩阵 A 和割集基矩阵 Q 之间可以通过非奇异变换连系起来(§2-4)，即

$$\mathbf{Q}=\mathbf{D}\mathbf{A}$$

所以 KCL 还可以写为

$$\mathbf{Q}_a\mathbf{i}_b=0$$

其实，上式恰好表明通过任何一个闭合面的电流的代数和恒等于零。

选择 G 的一个树 T，置换矩阵 A 的各列，使之按先连支，后树支的次序排列，并把支路电流列向量的各元素按同一次序排列($\mathbf{i}_b$ 是 $b\times 1$ 阶的)，则式(3-1)可写为

$$[\mathbf{A}_{11} \mid \mathbf{A}_{12}]\begin{bmatrix} \mathbf{i}_l \\ \cdots \\ \mathbf{i}_t \end{bmatrix}=0$$

其中 $\mathbf{i}_l$ 对应连支电流，$\mathbf{i}_t$ 对应树支电流。把上式乘出后，有

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{i}_l+\mathbf{A}_{12}\mathbf{i}_t=0$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{i}_t=-\mathbf{A}_{11}\mathbf{i}_l$$

由于 $\mathbf{A}_{12}$ 是非奇异的，所以

$$\mathbf{i}_t=-\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}\mathbf{i}_l$$

这样，n 个树支电流可以用 $b-n=l$ 个连支电流来表达。上式还可写为

$$\mathbf{i}_b=\begin{bmatrix} \mathbf{i}_l \\ \cdots \\ \mathbf{i}_t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \cdots\cdots \\ -\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}\mathbf{i}_l$$

或

$$\mathbf{i}_b=[\,\mathbf{1} \mid -(\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11})^T]^T\mathbf{i}_l$$

$$\mathbf{i}_b=\mathbf{B}_f^T\mathbf{i}_l$$

所以 b 个支路电流可以用 l 个连支电流来表达。

同理，在式(3-2)中，如用 f- 回路矩阵 $\mathbf{B}_f$，且把 $\mathbf{B}$ 的各列按先连支、后树支分块，将有($\mathbf{u}_l$ 对应连支电压、$\mathbf{u}_t$ 对应树支电压)

$$[\mathbf{1} \mid \mathbf{B}_{f12}]\begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \cdots \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}=0$$

$$\mathbf{u}_l+\mathbf{B}_{f12}\mathbf{u}_t=0$$

$$\mathbf{u}_l=-\mathbf{B}_{f12}\mathbf{u}_t$$

就是说，l 个连支电压可以用 n 个树支电压来表达。上式还可写为

$$\mathbf{u}_b=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \cdots \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{f12}\mathbf{u}_t \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_b=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{f12} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{Q}_f^T \mathbf{u}_t$$

即 b 个支路电压可以用 n 个树支电压来表达。

从以上的讨论中可见，无论是支路电流，或者是支路电压，并不全部都是独立的。基尔霍夫定律的约束使得 b 个支路电流可以用 l 个适当选择的独立电流变量来表示，同样，b 个支路电压可以用 n 个适当选择的独立电压变量来表示。下面要介绍的节点法、回路法和割集法就是以这个思想为基础的。

§3-2 节 点 法

如以连通图 G 来表示一个具有 n_t 个节点的电网络，且设某一节点 v_0 为参考，其余节点对此参考节点的电压简称为节点电压，n 个节点电压可以用一个 n 阶列向量 $\mathbf{u}_n$ 来表示。如果某些节点与参考节点之间无直接的支路联接，则可设想在它们之间存在虚设支路，这样并没有增加节点的数目。这样一来，n 个节点电压就是 n 个树支电压了；这个树的树支就是节点与参考节点之间的支路。所以可以把它们选为一组独立的电压变量。或者，还可以从另外一个角度来考虑，n 个节点电压之间不存在任何闭合路，因此它们相互之间不受 KVL 的约束，就是说它们的任何组合的代数和不会等于零，所以是线性独立的。

联接于节点 r 和节点 s 的支路，如以 u_{rs} 表示此支路电压，则按 KVL，u_{rs} 将是节点电压 u_{nr} 和 u_{ns} 之差，即

$$u_{rs} = u_{nr} - u_{ns}$$

其中 u_{nr}、u_{ns} 分别为节点 r 和 s 之节点电压。如果 s 为参考节点 v_0，则 $u_{rs} = u_{nr}$，就是说该支路电压等于节点 r 的节点电压。

b 个支路电压可以用 n 个节点电压来表示，如以列向量 $\mathbf{u}_b$ 表示支路电压，则

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{C}\mathbf{u}_n$$

其中矩阵 $\mathbf{C}$ 的每一行将只具有两个非零元素，即 1 和 -1，这是因为一条支路只与两个节点关联，所以只与两个节点电压有关；且不难看出矩阵 $\mathbf{C}$ 的元素 c_{ij} 是按下列定义求出的：

$c_{ij}=1$，当支路 i 与节点 j 关联，且支路方向背离节点 j；

$c_{ij}=-1$，当支路 i 与节点 j 关联，且支路方向指向节点 j；

$c_{ij}=0$，当支路 i 与节点 j 无关联。

与图 G 的关联矩阵 $\mathbf{A}$ 比较，$\mathbf{C}$ 恰好是 $\mathbf{A}$ 的转置。因此，有

$$\mathbf{u}_b=\mathbf{A}^T\mathbf{u}_n \tag{3-3}$$

以图 3-1 为例，如节点电压用 u_{n1}、u_{n2}、u_{n3} 来表示，则各支路电压将是：$u_{b1}=u_{n1}-u_{n2}$，$u_{b2}=-u_{n1}+u_{n3}$，$u_{b3}(=u_{n1}-u_{n4})=u_{n1}$，$u_{b4}=u_{n2}-u_{n3}$，$u_{b5}=u_{n3}$，$u_{b6}=-u_{n2}$；而关联矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置是

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

不难验证 $\mathbf{u}_b=\mathbf{A}^T\mathbf{u}_n$

按定理 2-3，有 $\mathbf{B}\mathbf{A}^T=\mathbf{0}$，两边乘以 $\mathbf{u}_n$，将有

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^T\mathbf{u}_n=\mathbf{0}$$

但是，按式(3-3)，有 $\mathbf{u}_b=\mathbf{A}^T\mathbf{u}_n$，故得

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_b=\mathbf{0}$$

这恰好是 KVL。可见，$\mathbf{u}_b=\mathbf{A}^T\mathbf{u}_n$ 可以用来代替 $\mathbf{B}\mathbf{u}_b=\mathbf{0}$，或者说，用了式(3-3)，KVL 就自动地得到满足。

另外，按 KCL 还有

$$\mathbf{A}\mathbf{i}_b=\mathbf{0}$$

上式与式(3-3)是节点法的两个基本关系式。

要写出电网络的方程，还必须根据各支路的具体内容，列出支路电流与支路电压的关系。对于线性时不变网络，通常采用图 3-2 所示的一般支路，其中 i_{sk} 和 u_{sk} 分别为独立电流源与电压源的电流和电压。若用拉氏变换，并设零值初始条件，则有

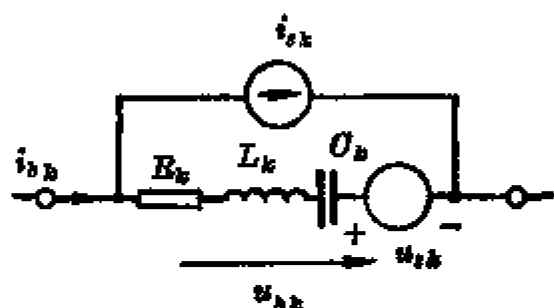


图 3-2 一般支路

$$U_{bk}(s)=\left(sL_k+R_k+\frac{1}{sC_k}\right)\{I_{bk}(s)-I_{sk}(s)\}+U_{sk}(s)$$

下面为了简化起见，把电压和电流括号中的 s 略去而简写为 U_{bk}，I_{bk} 等。令 $Z_k=sL_k+R_k+\frac{1}{sC_k}$，$Z_k$ 为支路 k 的运算阻抗，则上式可简化为

$$U_{bk}=Z_k\{I_{bk}-I_{sk}\}+U_{sk}$$

或

$$I_{bk}=Y_kU_{bk}+I_{sk}-Y_kU_{sk}$$

式中 $Y_k=1/Z_k$，即支路 k 的运算导纳。

如果各支路的电感之间不存在互感，则支路电压列向量和支路电流列向量之间的关系可写为

$$\mathbf{U}_b=\mathbf{Z}(\mathbf{I}_b-\mathbf{I}_s)+\mathbf{U}_s$$

式中 $\mathbf{Z}$ 为支路阻抗矩阵，$\mathbf{Z}$ 是一个对角阵，其主对角元素即各支路的运算阻抗，$\mathbf{Z}=\mathrm{diag}[Z_1, Z_2, \cdots, Z_b]$，而支路电压列向量 $\mathbf{U}_b=[U_{b1}, U_{b2}, \cdots, U_{bb}]^T$，支路电流列向量 $\mathbf{I}_b=[I_{b1}, I_{b2}, \cdots, I_{bb}]^T$，电流源列向量 $\mathbf{I}_s=[I_{s1}, I_{s2}, \cdots, I_{sb}]^T$，电压源列向量 $\mathbf{U}_s=[U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sb}]^T$。

如令 $\mathbf{Y}=\mathbf{Z}^{-1}$，则 $\mathbf{Y}=\mathrm{diag}[Y_1, Y_2, \cdots, Y_b]$，将有

$$\mathbf{I}_b=\mathbf{Y}\mathbf{U}_b+\mathbf{I}_s-\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

按式(3-3)，有 $\mathbf{U}_b=\mathbf{A}^T\mathbf{U}_n$，代入上式，

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{U}_n + \mathbf{I}_s - \mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

但是 $\mathbf{A}\mathbf{I}_b = 0$，所以得

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{U}_n + \mathbf{A}\mathbf{I}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s = 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{U}_n = -\mathbf{A}\mathbf{I}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

令 $\mathbf{Y}_n \triangleq \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$① 为节点导纳矩阵，则上式可写为

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{U}_n = -\mathbf{A}\mathbf{I}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

这就是所要的节点方程。如令 $\mathbf{I}_n \triangleq -\mathbf{A}\mathbf{I}_s + \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$，则节点方程为

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{U}_n = \mathbf{I}_n$$

$\mathbf{U}_n$ 解出后，$\mathbf{U}_b$ 和 $\mathbf{I}_b$ 就不难求出。

例 3-1 写出图 3-3*a* 所示电网络的节点方程。

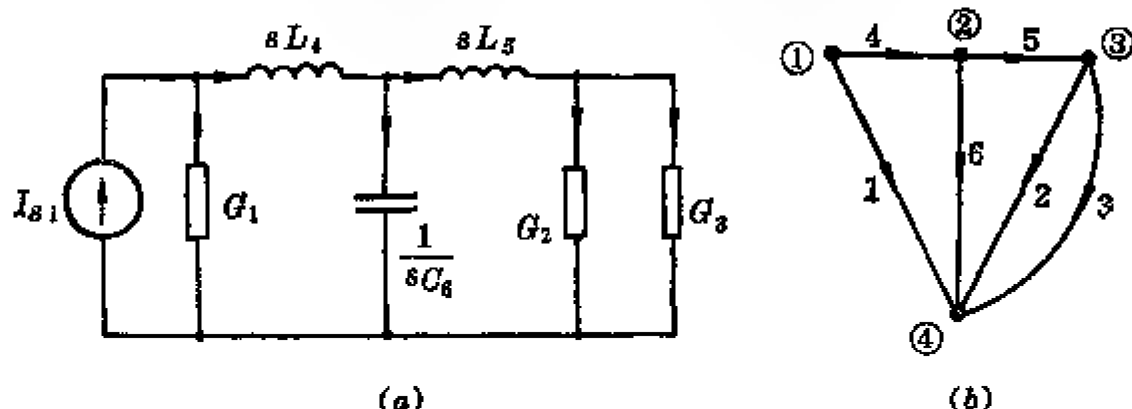


图 3-3 例 3-1 图

解 电网络的有向图如图 3-3*b* 所示，其中节点和支路均已标号。以节点 ④ 为参考，关联矩阵 **A** 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

支路导纳矩阵为 $\mathbf{Y} = \text{diag}\left[G_1, G_2, G_3, sL_4, sL_5, \dfrac{1}{sC_6}\right]$，电流源列向量 $\mathbf{I}_s = [-I_{s1}, 0, 0, 0, 0, 0]^T$，电压源列向量 $\mathbf{U}_s = 0$。节点导纳矩阵为

---

① "≜"表示"按定义等于"。

$$\mathbf{Y}_n=\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&1&1\\0&1&1&0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}G_1&\cdot&\cdot&\cdot&0&0\\0&G_2&\cdot&\cdot&0&0\\0&0&G_3&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&sL_4&\cdot&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&sL_5&0\\0&0&0&\cdot&0&\dfrac{1}{sC_6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}G_1+sL_4&-sL_4&0\\-sL_4&sL_4+sL_5+\dfrac{1}{sC_6}&-sL_5\\0&-sL_5&G_2+G_3+sL_5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_s=\begin{bmatrix}-I_{s1}\\0\\0\end{bmatrix}$$

所以节点方程为

$$\begin{bmatrix}G_1+sL_4&-sL_4&0\\-sL_4&sL_4+sL_5+\dfrac{1}{sC_6}&-sL_5\\0&-sL_5&G_2+G_3+sL_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{n1}\\U_{n2}\\U_{n3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}I_{s1}\\0\\0\end{bmatrix}$$

当网络中存在互感和受控电源时，情况将与上面所讲的略有不同，主要反映在支路电流与支路电压之间的关系中。下面将通过一个具体例子来说明处理的方法。

例 3-2 图 3 4a 所示电网络，电感 L_3 和 L_4 之间存在互感 M_{34}，电压控制电流源的电流 I_{d2} 为 g_mU_5，其中 U_5 为电容 C_5 上的电压。以节点 ④ 为参考，写出节点方程。

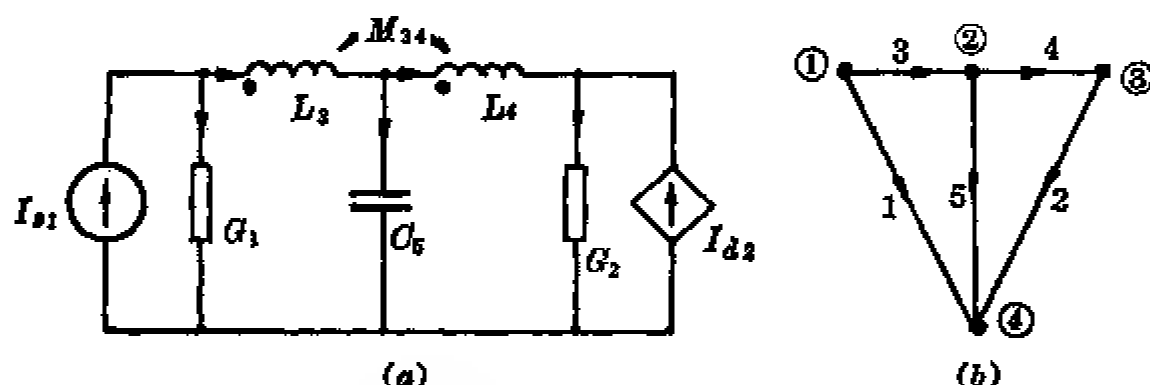


图 3-4 具有互感和受控源的电网络

解 支路 3 和支路 4 之间的电流、电压关系为

$$\begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} L_3 & M_{34} \\ M_{34} & L_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

所以，

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} L_3 & M_{34} \\ M_{34} & L_4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{L_4}{s(L_3L_4 - M_{34}^2)} & \dfrac{-M_{34}}{s(L_3L_4 - M_{34}^2)} \\ \dfrac{-M_{34}}{s(L_3L_4 - M_{34}^2)} & \dfrac{L_3}{s(L_3L_4 - M_{34}^2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{L_4}{s\,\Delta} & \dfrac{-M_{34}}{s\,\Delta} \\ \dfrac{-M_{34}}{s\,\Delta} & \dfrac{L_3}{s\,\Delta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

式中 $\Delta = L_3L_4 - M_{34}^2$。

支路 2 的电流、电压关系是

$$U_2 - Z_2(I_2 + I_{d2})$$

$$I_2 = G_2U_2 - g_mU_5$$

由此得出支路导纳矩阵

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}G_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & G_2 & 0 & 0 & -g_m\\ 0 & 0 & \frac{L_4}{s\Delta} & \frac{-M_{34}}{s\Delta} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-M_{34}}{s\Delta} & \frac{L_3}{s\Delta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & sC_5\end{bmatrix}
$$

按图 3-4b 可写出关联矩阵

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{Y}_n=\mathbf{AYA}^T
$$

$$
\mathbf{Y}_n=\begin{bmatrix}G_1+\frac{L_4}{s\Delta} & -\frac{L_4+M_{34}}{s\Delta} & \frac{M_{34}}{s\Delta}\\ -\frac{L_4+M_{34}}{s\Delta} & \frac{L_3+L_4+2M_{34}}{s\Delta}+sC_5 & -\frac{L_3+M_{34}}{s\Delta}\\ \frac{M_{34}}{s\Delta} & -\frac{L_3+M_{34}}{s\Delta}-g_m & G_2+\frac{L_3}{s\Delta}\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{I}_s=[-I_{s1},0,0,0,0,0]^T \qquad \mathbf{U}_s=0
$$

$$
-\mathbf{AI}_s=\begin{bmatrix}I_{s1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
$$

故得节点方程

$$
\mathbf{Y}_n\begin{bmatrix}U_{n1}\\ U_{n2}\\ U_{n3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{s1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
$$

§3-3 回 路 法

前面已经指出 b 个支路电流可以用 l 个连支电流来表示。设想一个单连支回路，并假设连支中电流连续在回路中流动，这种假

想的连续电流称为回路电流，它流进任一节点，必同时流出此同一节点。l 个连支电流可以确定 l 个回路电流，而树支中的电流将是这些回路电流的组合(即代数和)。把图 3-1 所示的图，重画于图 3-5 中。以支路 1、2、3 为树，图3-5中画出了三个单连支回路，以及相应的回路电流 i_{l1}、i_{l2}、i_{l3}；从图中可以看出：

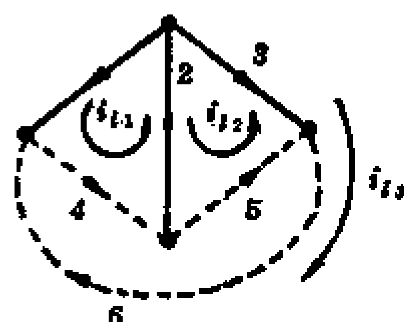


图 3-5　回路电流

$$i_{b4}=i_{l1} \qquad i_{b5}=i_{l2}$$
$$i_{b6}=i_{l3} \qquad i_{b1}=i_{l1}-i_{l3}$$
$$i_{b2}=i_{l1}-i_{l2} \qquad i_{b3}=-i_{l2}+i_{l3}$$

如果写出 f- 回路矩阵，则有

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{B}_f= \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 \vdots & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

不难验证：

$$\begin{bmatrix} i_{b4} \\ i_{b5} \\ i_{b6} \\ i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_f^T \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \end{bmatrix}$$

即
$$\mathbf{i}_b=\mathbf{B}_f^T\mathbf{i}_l \tag{3-4}$$

其实，这个关系式在 § 3-1 中已经得出，不过这里的 $\mathbf{i}_l$ 是回路电流。按定理 2-3，有

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_f^T=0$$

两边乘以 $\mathbf{i}_l$，得

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_f^T\mathbf{i}_l=0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{i}_b=0$$

这恰好是 KCL，可见这个关系式是以 $\mathbf{A}\mathbf{i}_b=0$ 为基础的，就是说，用了式(3-4)，KCL 就自动地得到了满足。

如果任意假想一组回路电流 $\mathbf{i}_M$（$\mathbf{i}_M$ 为 l 阶），并认为支路电流是有关回路电流的组合，则不难得出

$$\mathbf{i}_b=\mathbf{B}^T\mathbf{i}_M$$

其中 B 为对应的回路矩阵。只要 B 的秩是 $b-n=l$，则这一组回路电流将是独立的。上面用选树的办法，并以连支电流作为回路电流只是许多可能中的一种。

对于平面网络来说，可以用网孔电流（外网孔不计在内）作为回路电流。图 3-6 为一个平面图，其支路数 $b=9$，节点数 $n_t=6$，网孔数 $=4$。若以网孔作为回路，并令回路方向均为顺时针方向，其回路矩阵（称为网孔矩阵）为

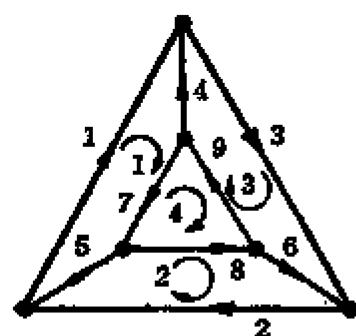


图 3-6 网孔电流

$$\mathbf{B}_m=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccccccc}1&0&0&-1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&-1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1\end{array}\right]\end{array}$$

由于每一支路只与两个网孔有关（除了那些与无限面即外网孔有关的外），矩阵 $\mathbf{B}_m$ 在形式上与关联矩阵 A 相似。如果把无限面作为外网孔并指定其方向为逆时针方向，$\mathbf{B}_m$ 将加一行，这时的 $\mathbf{B}_m$ 的每一列将具有两个非零元素，即一个 1 和一个 -1，其余均为零。这种情况下的 $\mathbf{B}_m$ 与 $\mathbf{A}_a$ 相似。其实，从平面图的对偶关系，不难得出这个结论。

$\mathbf{B}_m$ 的秩恰好等于网孔数，即 $b-n$，也就是连支数 l；其证明方法与证明关联矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 n 相类似。由此可见，$\mathbf{B}_m$ 是回路基矩阵，网孔电流是一组独立的回路电流。

要写出电网络的回路方程，仍可采用图 3-2 的一般支路。在考虑到具有互感和受控源的情况下，支路电压列阵将是

$$\mathbf{U}_b=\mathbf{Z}(\mathbf{I}_b-\mathbf{I}_s)+\mathbf{U}_s$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是支路阻抗矩阵，其主对角元素为各支路阻抗，非主对角元素则考虑到互感以及受控源等。若设回路电流列向量为 $\mathbf{I}_l$（阶数为 $l\times1$），回路矩阵为 $\mathbf{B}_l$，则有

$$\mathbf{I}_b=\mathbf{B}_l^T\mathbf{I}_l$$

$$\mathbf{B}_l\mathbf{U}_b=0$$

根据以上诸式，化简后，得

$$\mathbf{B}_l\mathbf{Z}\mathbf{B}_l^T\mathbf{I}_l=\mathbf{B}_l\mathbf{Z}\mathbf{I}_s-\mathbf{B}_l\mathbf{U}_s$$

若以 $\mathbf{Z}_l\triangleq\mathbf{B}_l\mathbf{Z}\mathbf{B}_l^T$，$\mathbf{Z}_l$ 称为回路阻抗矩阵，则有

$$\mathbf{Z}_l\mathbf{I}_l=\mathbf{B}_l\mathbf{Z}\mathbf{I}_s-\mathbf{B}_l\mathbf{U}_s$$

上列是一组$(b-n)$或 l 个线性独立的方程。解出 $\mathbf{I}_l$，得

$$\mathbf{I}_l=\mathbf{Z}_l^{-1}\mathbf{B}_l\mathbf{Z}\mathbf{I}_s-\mathbf{Z}_l^{-1}\mathbf{B}_l\mathbf{U}_s$$

$\mathbf{I}_l$ 求出后，不难求出 $\mathbf{I}_b$ 和 $\mathbf{U}_b$。

下面的具体例子将说明回路方程的编写方法。

例 3-3 图 3-7*a* 所示电网络，其图如 3-7*b* 所示，若以网孔为

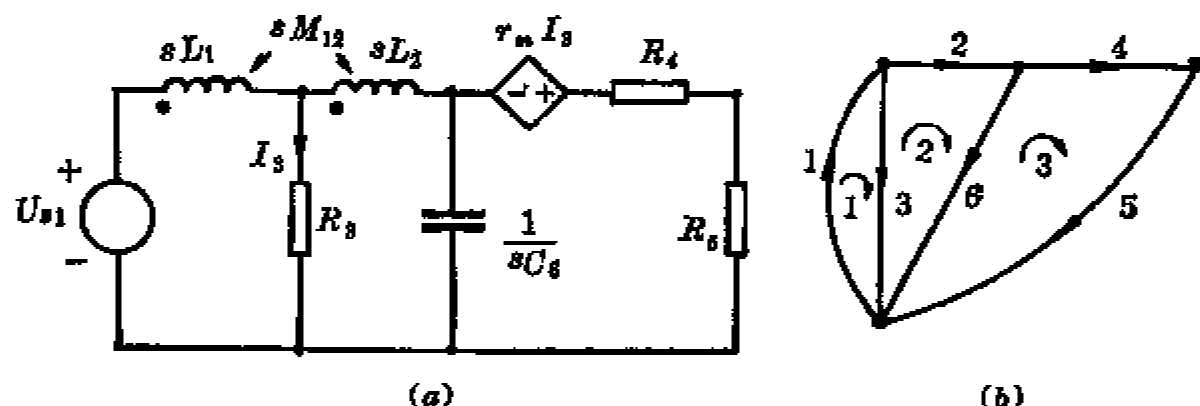


图 3-7 例 3-3 图

回路，写出其回路方程。

解 回路矩阵 $\mathbf{B}_l$ 为

$$\mathbf{B}_l=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}sL_1 & sM_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ sM_{12} & sL_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r_m & R_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{sC_6}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_l=\mathbf{B}_l\mathbf{Z}\mathbf{B}_l^T=\begin{bmatrix}sL_1+R_3 & sM_{12}-R_3 & 0\\ sM_{12}-R_3 & sL_2+R_3+\dfrac{1}{sC_6} & -\dfrac{1}{sC_6}\\ -r_m & r_m-\dfrac{1}{sC_6} & R_4+R_5+\dfrac{1}{sC_6}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_l\mathbf{U}_s=\begin{bmatrix}-U_{s1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

故得回路方程为

$$\begin{bmatrix}sL_1+R_3 & sM_{12}-R_3 & 0\\ sM_{12}-R_3 & sL_2+R_3+\dfrac{1}{sC_6} & -\dfrac{1}{sC_6}\\ -r_m & r_m-\dfrac{1}{sC_6} & R_4+R_5+\dfrac{1}{sC_6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{l1}\\ I_{l2}\\ I_{l3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_{s1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

§3-4 割 集 法

割集法与回路法具有对偶性质，且与节点法类似。§3-1 中已

经指出，由于 $\mathbf{B}_f\mathbf{u}_b=0$，可得出

$$\mathbf{u}_b=\mathbf{Q}_f^T\mathbf{u}_t$$

如果把确定 f-割集的单树支的电压作为割集电压 $\mathbf{u}_c$，$\mathbf{u}_c$ 的方向与 $\mathbf{u}_t$ 的方向一致，则全部支路电压就可以用割集电压来表示。这个概念还可以推广到任何割集，即只要 $\mathbf{Q}$ 是割集基矩阵，则总存在下列关系式：

$$\mathbf{u}_b=\mathbf{Q}^T\mathbf{u}_c \tag{3-5}$$

其中 $\mathbf{u}_c$ 为割集电压列向量。任一个割集把一个连通图的节点分划为两个节点集合，割集电压就是这两组节点之间的电压，即节偶之间的电压，可见割集电压是一种假想的电压，如同回路电流是一种假想的电流。对 f-割集来说，割集电压就是树支电压。§3-2 中的节点电压可以看作是一种特殊的割集电压。

不难看出，由于 $\mathbf{B}\mathbf{Q}^T=0$，两边乘以 $\mathbf{u}_c$，得

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T\mathbf{u}_c=0$$

如以 $\mathbf{Q}^T\mathbf{u}_c=\mathbf{u}_b$ 代入上式，得

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_b=0$$

可见式(3-5)可以用来代替 $\mathbf{B}\mathbf{u}_b=0$，或者说，用了式(3-5)，KVL 就自动地得到满足。

另外，按 KCL，还有

$$\mathbf{Q}\mathbf{i}_b=0$$

此式与式(3-5)是割集法的基础。

对于线性时不变网络，用割集法来写网络的方程，仍可以采用图 3-2 的一般支路。支路电流列向量与支路电压列向量之间的关系可写为

$$\mathbf{I}_b=\mathbf{Y}\mathbf{U}_b+\mathbf{I}_s-\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

其中 $\mathbf{Y}=\mathbf{Z}^{-1}$ 是支路导纳矩阵，它是支路阻抗矩阵 $\mathbf{Z}$ 的逆矩阵。按式(3-5)，有

$$\mathbf{U}_b=\mathbf{Q}^T\mathbf{U}_c$$

其中 $\mathbf{U}_c$ 为割集电压列向量。

$$\mathbf{I}_b=\mathbf{Y}\mathbf{Q}^T\mathbf{U}_c+\mathbf{I}_s-\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{I}_b=\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{Q}^T\mathbf{U}_c+\mathbf{Q}\mathbf{I}_s-\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s=0$$

故得

$$\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{Q}^T\mathbf{U}_c=-\mathbf{Q}\mathbf{I}_s+\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

如以 $\mathbf{Y}_c\triangleq\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{Q}^T$ 为割集导纳矩阵，则有

$$\mathbf{Y}_c\mathbf{U}_c=\quad\mathbf{Q}\mathbf{I}_s+\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

这就是所需要的割集方程。可以解得

$$\mathbf{U}_c=-\mathbf{Y}_c^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{I}_s+\mathbf{Y}_c^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{U}_s$$

例3-4 写出图3-8a所示的电阻网络的割集方程。选择 f 割集如同图 b 所示。

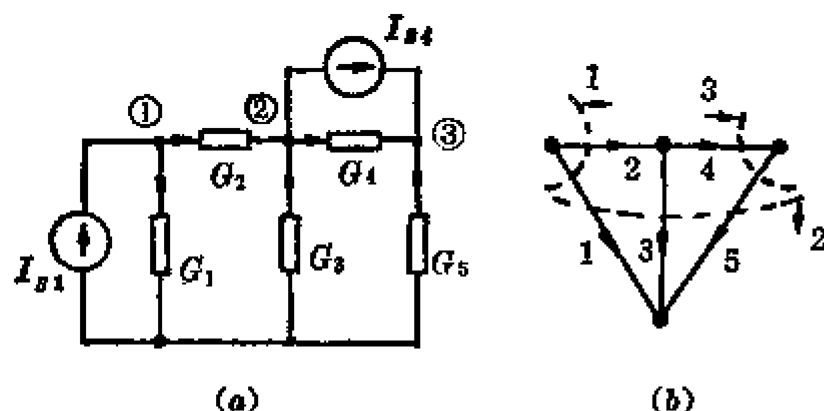


图3-8 例3-4图

解 f-割集矩阵为

$$\mathbf{Q}_f=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

支路导纳矩阵为 $\mathbf{Y}=\mathrm{diag}[G_1,G_2,G_3,G_4,G_5]$。

$$\mathbf{Y}_c=\mathbf{Q}_f\mathbf{Y}\mathbf{Q}_f^T=\begin{bmatrix}G_1+G_2&G_1&0\\G_1&G_1+G_3+G_5&-G_5\\0&-G_5&G_4+G_5\end{bmatrix}$$

$$
-\mathbf{Q}_f\mathbf{I}_s=\begin{bmatrix} I_{s1} \\ 0 \\ -I_{s4} \end{bmatrix}
$$

故有割集方程：

$$
\begin{bmatrix} G_1+G_2 & G_1 & 0 \\ G_1 & G_1+G_3+G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{c1} \\ U_{c2} \\ U_{c3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{s1} \\ 0 \\ -I_{s4} \end{bmatrix}
$$

当用 f- 割集时，可以任选一个树，使得这个树的树支可以根据需要包含那些有关的元件，所以割集法具有一定的灵活性。它特别适用于非线性电路以及状态变量法。下面先考虑非线性电阻网络的方程。

电压控制电阻元件和电流控制电阻元件的伏安特性分别用下列方程来描述：

$$
i=g(u) \qquad u=r(i)
$$

其中 $g(u)$和 $r(i)$分别为 u 和 i 的函数，一般并不存在其逆函数。所以，方程中就不允许出现 $g^{-1}(u)$ 和 $r^{-1}(i)$，这种情况与线性网络是不同的。

把网络中的一般支路分为两种不同类型，如图 3-9a、b 所示，

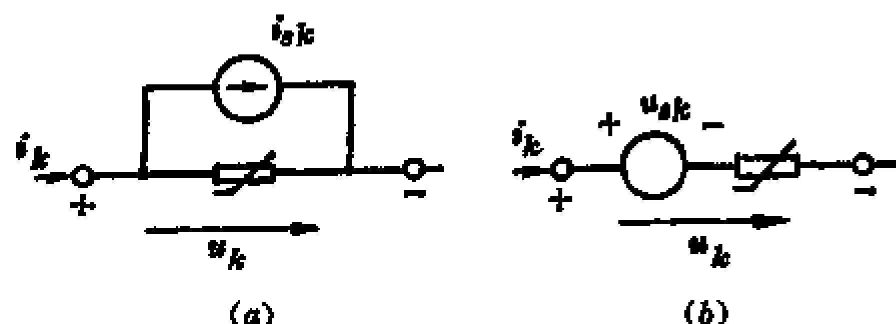


图 3-9 非线性电阻支路

其中 a 为电流控制电阻支路，b 为电压控制电阻支路。对图 a 来说，

$$
u_k=r_k(i_k-i_{sk})
$$

对图 b 来说，

$$i_k = g_k(u_k - u_{sk})$$

注意，式中 $r_k(\cdot)$，$g_k(\cdot)$表示相应的非线性函数。现在再作如下的假设：可以选择一个树，使得全部电流控制电阻支路为树支，全部电压控制电阻支路为连支，这种树称为特有树(proper tree)。对于满足这样条件的非线性电阻网络，其割集方程可用下列方法来编写。

令 $\mathbf{i}_l$ 和 $\mathbf{i}_t$ 分别为连支电流和树支电流列向量，并令 $\mathbf{i}_s$ 和 $\mathbf{u}_s$ 分别为电流源和电压源列向量。这样，全部电流控制电阻支路可用下面的向量关系式来描述：

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{r}(\boldsymbol{i}_t - \boldsymbol{i}_s) \qquad (a)$$

其中 $\mathbf{r}(\cdot)$ 是以非线性函数 $r_j(\cdot)$，$r_k(\cdot)$ 等为元素的列向量。同理，全部电压控制电阻支路可用下面的向量关系式来描述：

$$\mathbf{i}_l = \mathbf{g}(\boldsymbol{u}_l - \boldsymbol{u}_s) \qquad (b)$$

其中 $\mathbf{g}(\cdot)$是以非线性函数 $g_j(\cdot)$，$g_k(\cdot)$等为元素的列向量。

若网络中还有线性电阻支路，则特有树的树支除应包括全部电流控制电阻支路外，还将包括部分线性电阻，而连支将包括全部电压控制电阻支路以及一些线性电阻。

按所选的特有树，写出 f- 割集矩阵，各支路应按先连支，后树支的次序予以标号。这样，

$$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_{f11} \quad \mathbf{1}]$$

另外，由KCL 给出

$$\mathbf{Q}_f\mathbf{i}_b = 0$$

或

$$\mathbf{Q}_{f11}\mathbf{i}_l = -\mathbf{i}_t \qquad (c)$$

f 回路矩阵 $\mathbf{B}_f$ 将是

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{1} \quad -\mathbf{Q}_{f11}^T]$$

由 KVL 给出

$$\mathbf{B}_f\mathbf{u}_b=0$$

$$\mathbf{u}_t=\mathbf{Q}_{f11}^T\mathbf{u}_t \qquad (d)$$

在以上的四个关系式 a、b、c、d 中，已知的有 $\mathbf{i}_s$、$\mathbf{u}_s$、$\mathbf{r}(\cdot)$、$g(\cdot)$以及 $\mathbf{Q}_{f11}$（后者是按网络的图列出的），而未知量为 $\mathbf{i}_t$、$\mathbf{i}_l$、$\mathbf{u}_l$ 和 $\mathbf{u}_t$。不难从式 a、b、c、d 中消去其中三个而求得其中一个。具体步骤如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_l&=\mathbf{Q}_{f11}^T\mathbf{r}(\mathbf{i}_t-\mathbf{i}_s)\\&=\mathbf{Q}_{f11}^T\mathbf{r}(-\mathbf{Q}_{f11}\mathbf{i}_l-\mathbf{i}_s)\end{aligned}$$

从式 b 有 $$\mathbf{i}_l=\mathbf{g}(\mathbf{u}_l-\mathbf{u}_s)$$

故

$$\mathbf{u}_l=\mathbf{Q}_{f11}^T\mathbf{r}(-\mathbf{Q}_{f11}\mathbf{g}(\mathbf{u}_l-\mathbf{u}_s)-\mathbf{i}_s)$$

上式是以 $\mathbf{u}_l$ 为未知量的一个向量隐含方程，其解析解一般是无法求得的。

如以 $\mathbf{h}(\mathbf{u}_l)$定义上式的右方，则上式可简化为

$$\mathbf{u}_l=\mathbf{h}(\mathbf{u}_l)$$

注意，在以上的推导过程中没有用到 $r^{-1}(\cdot)$或 $g^{-1}(\cdot)$。

状态变量方程的编写方法在下一节介绍。

§ 3-5 状 态 方 程

“状态”是系统理论中的一个基本概念。一个系统的状态是在某给定时间对该系统所必须具备的最少量的信息，连同该时间的输入，可以完全确定系统今后的特性。在电网络中，粗略地说，状态就是在某一给定时间 t_0 网络中存在的一组独立的初始条件，状态变量就是一组独立的动态变量，它们在 t_0 时的值组成了在该时刻的状态。状态方程就是用状态变量来表达的一组独立的一阶微分方程，其一般形式如下：

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{v}$$

其中 $\mathbf{x}$ 称为状态向量，而 $\mathbf{v}$ 称为输入向量，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为系数矩阵，$\dot{\mathbf{x}}$

表示$\frac{d\mathbf{x}}{dt}$。上列方程有时称为向量微分方程。

对于线性时不变的电网络，通常用电容上电压和电感中电流作为状态变量。为了简化讨论起见，对各支路的结构作如下限制：只允许独立电流源跨接在电容(或电导)上，独立电压源只能与电感(或电阻)串联，如图 3-10 所示。各支路电流与支路电压的关系将为

$$i_C = C\frac{du_c}{dt} + i_{sC} \qquad i_G = Gu_G + i_{sG}$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} + u_{sL} \qquad u_R = R_{iR} + u_{sR}$$

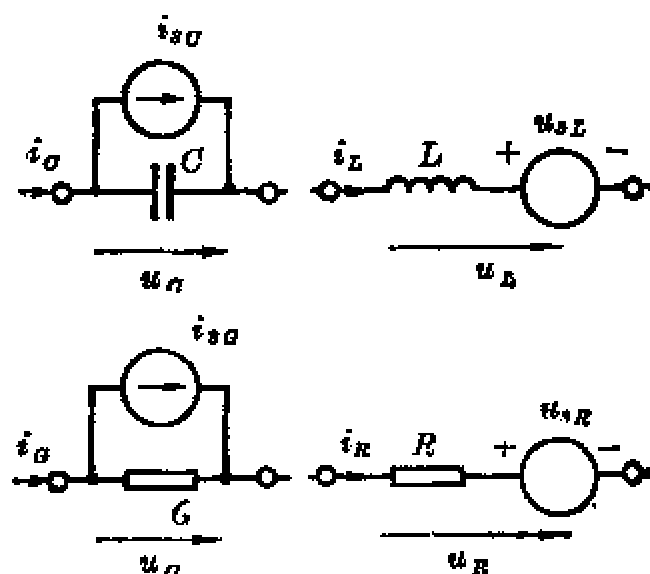


图 3-10 支路结构

下面将先就一种情况来讨论，即假设在网络中不存在任何包含纯由电容构成的回路和纯由电感构成的割集。这样就能保证选择一个特有树，其树支可以包括所有电容，可能还加上一些电导，但不包含任何电感，其连支包括所有电感，可能还加上一些电阻；这是因为当无电容回路时，所有电容能被选为一个树的树支，而当无电感割集时，电感就可以不出现在一个树中。

对各支路的编号按下列次序：电阻、电感、电容、电导，电阻和

电感都在连支中，电容和电导都在树支中。这样，支路电流列向量和支路电压列向量可以分块如下：

$$\mathbf{i}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}_l\\ \cdots\\ \mathbf{i}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}_R\\ \cdots\\ \mathbf{i}_L\\ \cdots\\ \mathbf{i}_C\\ \cdots\\ \mathbf{i}_G\end{bmatrix}\qquad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_l\\ \cdots\\ \mathbf{u}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_R\\ \cdots\\ \mathbf{u}_L\\ \cdots\\ \mathbf{u}_C\\ \cdots\\ \mathbf{u}_G\end{bmatrix}$$

其次，定义下列对角矩阵：

$$\mathbf{R}\triangleq\text{diag}[R_1, R_2, \cdots\cdots]\qquad \mathbf{L}\triangleq\text{diag}[L_1, L_2, \cdots\cdots]$$

$$\mathbf{C}\triangleq\text{diag}[C_1, C_2, \cdots\cdots]\qquad \mathbf{G}\triangleq\text{diag}[G_1, G_2, \cdots\cdots]$$

和电源列向量：

$$\mathbf{u}_s\triangleq\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{sR}\\ \cdots\\ \mathbf{u}_{sL}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{i}_s\triangleq\begin{bmatrix}\mathbf{i}_{sC}\\ \cdots\\ \mathbf{i}_{sG}\end{bmatrix}$$

按选择的特有树，以及上述支路的标号，写出 f- 割集矩阵：

$$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{Q}_{f11}\quad \mathbf{1}\ ]$$

从而有
$$\mathbf{Q}_{f11}\mathbf{i}_l=-\mathbf{i}_t$$

及
$$\mathbf{u}_l=\mathbf{Q}_{f11}^T\mathbf{u}_t$$

$\mathbf{Q}_{f11}$ 的行数为树支数，列数为连支数。

如果把 $\mathbf{Q}_{f11}$ 分块如下：

$$\mathbf{Q}_{f11}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2\\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4\end{bmatrix}\begin{matrix}\}C\\ \}G\end{matrix}\quad(\text{列：}\underbrace{}_{R}\ \underbrace{}_{L})\qquad \mathbf{Q}_{f11}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1^T & \mathbf{K}_3^T\\ \mathbf{K}_2^T & \mathbf{K}_4^T\end{bmatrix}\begin{matrix}\}R\\ \}L\end{matrix}\quad(\text{列：}\underbrace{}_{C}\ \underbrace{}_{G})$$

则可得下式，

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2\\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_R\\ \cdots\\ \mathbf{i}_L\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\mathbf{i}_C\\ \cdots\\ \mathbf{i}_G\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \cdots \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_1^T & \mathbf{K}_3^T \\ \hline \mathbf{K}_2^T & \mathbf{K}_4^T \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \cdots \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix}$$

各支路电流与支路电压之间的关系可写为

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{R}\mathbf{i}_R + \mathbf{u}_{sR}$$

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}_L}{dt} + \mathbf{u}_{sL}$$

$$\mathbf{i}_C = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{u}_C}{dt} + \mathbf{i}_{sC}$$

$$\mathbf{i}_G = \mathbf{G}\mathbf{u}_G + \mathbf{i}_{sG}$$

从以上各式，经整理后可导得以下诸式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}\dfrac{d\mathbf{i}_L}{dt} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{C}\dfrac{d\mathbf{u}_C}{dt} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{K}_2^T \\ \hline -\mathbf{K}_2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \cdots \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{K}_4^T \\ \hline -\mathbf{K}_1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_R \\ \cdots \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sC} \\ \cdots \\ \mathbf{i}_{sG} \\ \cdots \\ \mathbf{u}_{sR} \\ \cdots \\ \mathbf{u}_{sL} \end{bmatrix} \qquad (a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{i}_R \\ \cdots \\ \mathbf{G}\mathbf{u}_G \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{K}_1^T \\ \hline -\mathbf{K}_4 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \cdots \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{K}_3^T \\ \hline -\mathbf{K}_3 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_R \\ \cdots \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sC} \\ \cdots \\ \mathbf{i}_{sG} \\ \cdots \\ \mathbf{u}_{sR} \\ \cdots \\ \mathbf{u}_{sL} \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}_3^T \\ \mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}_3 & \mathbf{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_R \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}_1^T \\ -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sC} \\ \mathbf{i}_{sG} \\ \mathbf{u}_{sR} \\ \mathbf{u}_{sL} \end{bmatrix} \qquad (b)$$

用式(b)从式(a)中消去 $\mathbf{i}_R$ 和 $\mathbf{u}_G$ 时，有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_R \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix}=\mathbf{D}\mathbf{x}+\mathbf{E}\mathbf{v}$$

式中以

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{sC} \\ \mathbf{i}_{sG} \\ \mathbf{u}_{sR} \\ \mathbf{u}_{sL} \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}_3^T \\ \mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}_3 & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}_1^T \\ -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}_3^T \\ \mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}_3 & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

从而可以求得

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{v} \qquad (3\text{-}6)$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}_2^T \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}_4^T \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}_4^T \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{E}+\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

式(3-6)就是所需要的状态方程。

在以上的讨论中，曾做了一个假设，即网络中不存在纯由电容构成的回路和纯由电感构成的割集。在这种情况下，状态方程的阶数将等于网络中的电容和电感的数目之和，或者说，等于动态元件的总数。这时，独立初始条件数目也就是这个数目。但是，如果网络中存在由电容构成的回路和由电感构成的割集，则独立状态变量或独立初始条件的数目将少于动态元件的数目。以图 3-11a 所示网络为例，这里有一个纯电容回路和一个纯电感割集。不难看出，应当有

$$u_{C_3}=u_{C_4} \qquad i_{L_1}=i_{L_2}$$

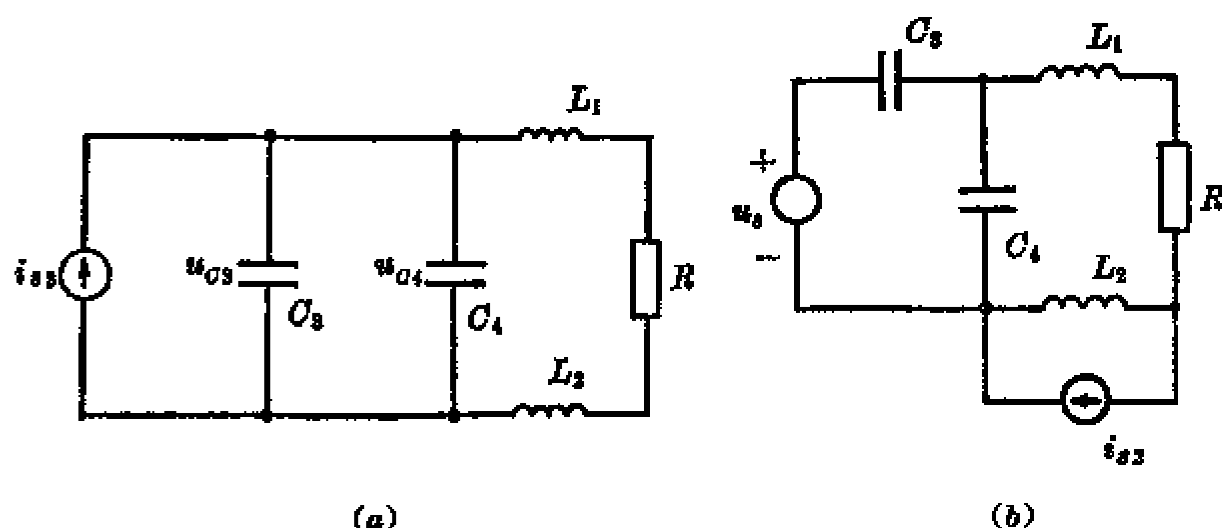


图 3-11　纯电容回路和纯电感割集

所以网络的独立状态变量或独立初始条件将只有二个。同理，若不考虑图 3-10 所示的支路结构的限制，对于图 3-11b 所示的网络，其中有一个回路是由独立电压源和电容构成，一个割集是由独立电流源和电感构成。显然，这个网络的独立状态变量也只有二个。

确定一个网络的动态性状的独立状态变量数目也就是描述该网络的状态方程的阶数。一个网络的独立状态变量数目等于储能元件总数减去独立纯电容回路与独立纯电感割集数目之和，即

$$n_s=n_{CL}-(n_C+n_L)$$

其中　　n_d＝独立状态变量数目或状态方程的阶数

n_{CL}＝电容和电感元件的总数

n_C＝纯由电容(其中可能包含独立电压源)构成的独立回路数

n_L＝纯由电感(其中可能包含独立电流源)构成的独立割集数

证明是很简单的。因为对任何纯由电容(其中可能包含独立电压源)构成的一个回路来说，其电容上电压将受 KVL 的约束；同理，对任何纯由电感(其中可能包含独立电流源)构成的一个割集来说，其电感中电流将受 KCL 的约束。因此，如果这种独立电容回路和独立电感割集的总数为(n_C+n_L)，则 n_{CL} 个状态变量受到(n_C+n_L)个独立方程的约束。换言之，独立状态变量数相应地减少了(n_C+n_L)。

对于一个复杂网络来说，要找出这种独立电容回路和独立割集的总数，有时是很不容易的。下面介绍的一种方法是把网络的图变化为两种不同的子图，然后按所得的子图就很容易确定 n_C 和 n_L。

以图 3-12a 所示的网络为例，其中电容的总数为 7，电感的总数为 4。同图 b 画出了该网络的图 G，其中把电容、电感、电阻、独立电压源和独立电流源都作为一个支路。把 G 的所有电感、电阻和电导、及独立电流源支路开断(即把支路移去)后所获得的子图，称为图 C^{∞}，C^{∞} 中将只含有电容支路和独立电压源支路。把 G 的所有电容、电阻和电导、及独立电压源支路短路(即把支路联接的两个节点合而为一)后所获得的子图，称为图 L^0，L^0 中将只含有电感支路和独立电流源支路。子图 C^{∞} 和 L^0 可能包含几个互不相交的部分。C^{∞} 中独立回路数等于 n_C，L^0 中独立割集数等于 n_L。以图 3-12 为例，$n_{LC}=11$，$n_C=3$，$n_L=2$，故 $n_d=6$。

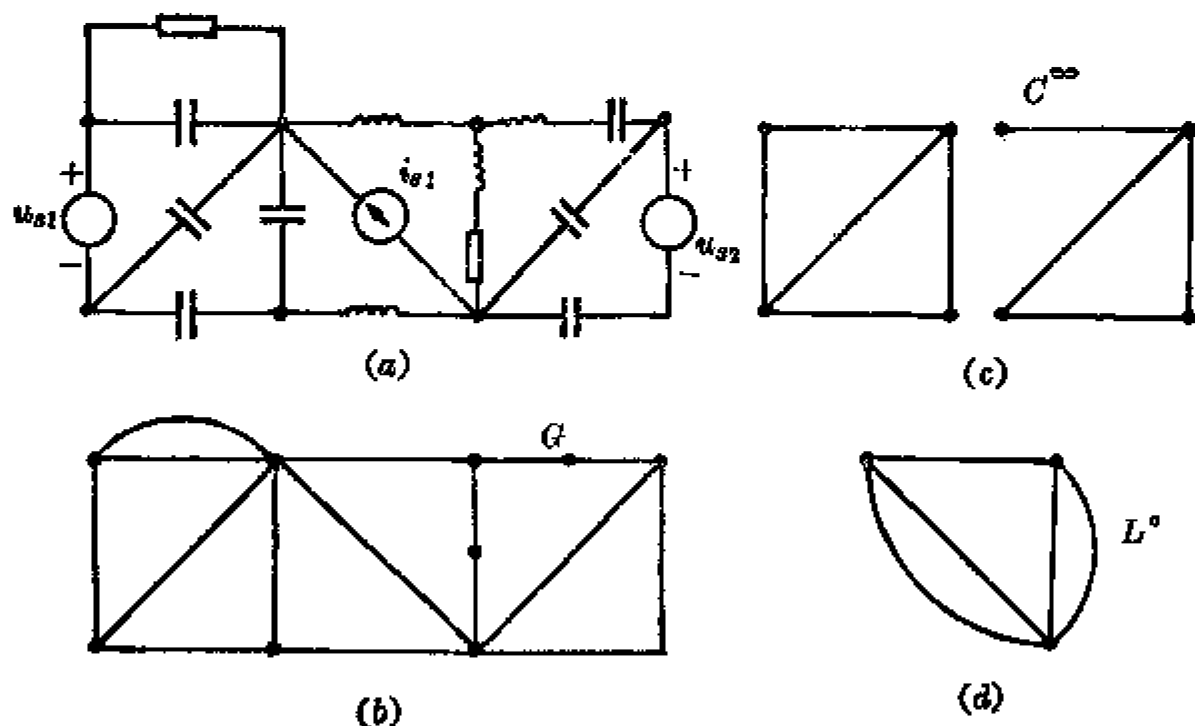


图 3-12　子图 C^{∞} 和 L^{0}

当一个网络包含纯由电容构成的回路和纯由电感构成的割集时，则无法找到一个树，其树支能包括全部电容，其连支能包括全部电感；或者说，前面所讲的特有树将不存在。为了解决这个障碍，引入了正常树(normal tree)的概念。一个正常树的树支包含尽可能多的电容和尽可能少的电感。(以上讨论仍设支路结构受图 3-10 所示的限制)。选择了正常树后，把所有树支电容电压和所有连支电感电流选为状态变量。然后按前面的步骤把非状态变量消去，就可以列出网络的状态方程，详细过程可参阅有关专著，这里不再细述。

§3 6　节点导纳行列式的拓扑公式

某些网络函数，如网络的驱点函数和转移函数，都可以直接根据网络的图写出它们的公式，而不必通过行列式和余因式的展开来求得。这类公式称为拓扑公式。在基尔霍夫和麦克斯韦等人的著作中已经提出过类似的公式；本世纪 50 年代前后对这些公式重

新发生了兴趣，并有所发展。拓扑公式在网络分析和综合中都获得了应用。在网络分析中，这类公式的显著特点就是它们提供了计算网络行列式的一个简捷的方法，即避免了行列式展开过程中一些项相互抵消的运算；不过应用这类公式时必须列出图的全部树，而树的数目之多是惊人的，因而对大型网络来说，这类公式的实用意义是不大的。

在介绍拓扑公式之前，先补充关于关联矩阵的一个重要性质，即连通图的关联矩阵 **A** 的一个非奇异子矩阵的行列式值应等于1或−1。这可以证明如下：由于矩阵 **A** 的每一列最多只能包含两个非零元素，即一个1和一个−1。**A** 的一个非奇异子矩阵的任何列不能都为零，而且每列不能都包含一个1和一个−1，否则行将线性相关，因而违反了非奇异的条件。所以，至少应当有一列中只含有一个非零元素即±1。按此列展开行列式，得

$$\Delta=\pm 1\Delta_{ij}$$

其中 Δ_{ij} 为此非零元素的余因式。Δ_{ij} 与原行列式的结构应当是一样的，它应当有一列其中只有一个非零元素即±1。把 Δ_{ij} 按这一列展开；这样继续下去，最终获得

$$\Delta=(\pm 1)(\pm 1)\cdots(\pm 1)=\pm 1$$

下面介绍矩阵代数中的一个定理，毕内-柯西(Binet-Cauchy)定理。此定理是后面用来证明所有拓扑公式的一个重要依据，其内容如下：

令矩阵 **P** 的阶数为 $m\times n$，矩阵 **Q** 的阶数为 $n\times m$（**P** 和 **Q** 的元素可能是实数、复数或函数等），并令 $m<n$。矩阵乘积 **PQ** 的行列式值为

$$\det(\mathbf{PQ})=\sum(\mathbf{P}\text{ 和 }\mathbf{Q}\text{ 对应大子式的乘积})$$

式中求和是对全部大子式进行的。

定理中的所谓大子式是指最高阶子矩阵的行列式，即 m 阶，因

为 P 的阶数为 $m\times n(m<n)$。上式中"对应"二字的含意如下：如选 P 的大子式的列为 P 的 $j_1, j_2, \cdots, j_m$ 列，则 Q 的对应大子式的行应当是 Q 的 $j_1, j_2, \cdots, j_m$ 行。此定理的证明可参阅数学专著。作为例子，考虑下列两个矩阵，

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

大子式的阶数为2，用毕内—柯西定理有

$$\det(\mathbf{PQ})=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 6\\ -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 6\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=23$$

但矩阵乘积

$$\mathbf{PQ}=\begin{bmatrix}3 & 22\\ 1 & 15\end{bmatrix}$$

不难看出 $\det(\mathbf{PQ})=23$；所以结果是相符的。

假设一个连通网络中不存在互感和受控电源，支路导纳矩阵 Y 或支路阻抗矩阵 Z 都是对角阵。在 § 3-2 中，导出了节点方程

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{U}_n=\mathbf{I}_n$$

式中 $\mathbf{Y}_n=\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$ 是节点导纳矩阵，$\mathbf{Y}_n$ 的行列式称为节点导纳行列式，设用 Δ_n 来表示。现在来求 Δ_n。

设支路导纳矩阵 $\mathbf{Y}=\mathrm{diag}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_b)$。由于 Y 是对角阵，矩阵乘积 AY 与 A 的差别仅在于 A 的第 j 列被 Y_j 相乘，$j=1, 2, \cdots, b$，而 AY 与 A 的结构则完全相似。按毕内—柯西定理，

$$\Delta_n=\det\mathbf{Y}_n=\sum\{(\mathbf{AY})\text{和}\mathbf{A}^T\text{对应大子式的乘积}\}$$

按定理 2-2，以及前面刚证明的关于矩阵 A 的性质，A 的非零大

子式与树对应，且其值为±1。因此，**AY** 的非零大子式同样与树对应，且其值将为 $(\pm1)Y_{j1}Y_{j2}\cdots Y_{jn}$，其中 j_1，j_2，…，j_n 为一个树的树支。在矩阵 $\mathbf{A}^T$ 中的对应子矩阵是矩阵 **A** 的子矩阵的转置，所以它也将是非奇异的，两者的大子式具有相同值 1 或 -1。因此 $(\mathbf{AY})$ 和 $\mathbf{A}^T$ 对应大子式的乘积是 $Y_{j1}Y_{j2}\cdots Y_{jn}$。这个乘积是一个树的全部树支导纳的乘积，简称为树支导纳乘积。其余不与树对应的大子式都是零值。因此，有下列重要结果：

$$\Delta_n = \det(\mathbf{AYA}^T) = \sum_{\text{全部树}} \text{网络的树支导纳乘积} \qquad (3\text{-}7)$$

这个拓扑公式有时称为麦克斯韦公式（或规则）。根据这个公式求节点导纳行列式，需要列出网络的全部树，分别求出每个树的树支导纳乘积，并对全部树求这些乘积之和。

如果直接把 Δ_n 展开，其中将有许多相互抵消的项。但是用式(3-7)，则避免了这种多余的运算，并且不需要写出节点导纳矩阵。

另外，值得注意的是：按式(3-7)，不难看出节点导纳行列式与参考节点的选择是无关的。

例 3-5 用拓扑公式求图 3-13 *a* 所示网络的节点导纳行列式。

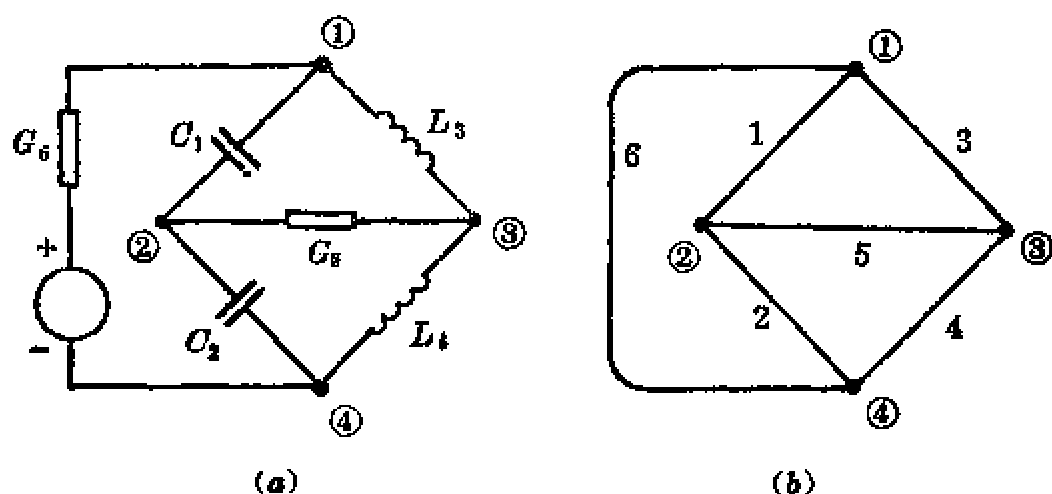


图 3-13 例 3-5 图

解 此网络的图如图 3-13 *b* 所示，它共有 16 个树，即(1,3,6)，

(1,2,5),(3,4,5),(2,4,6),(1,5,6),(3,5,6),(2,5,6),(4,5,6),(1,3,4),(1,2,4),(1,2,3),(2,3,4),(1,4,5),(2,3,5),(1,4,6),(2,3,6)。

根据式(3-7),得出

$$\Delta_n = \frac{C_1G_6}{L_3} + s^2C_1C_2G_5 + \frac{G_5}{s^2L_3L_4} + \frac{C_2G_6}{L_4} + sC_1G_5G_6$$
$$+\frac{G_5G_6}{sL_3} + sC_2G_5G_6 + \frac{G_5G_6}{sL_4} + \frac{C_1}{sL_3L_4} + \frac{sC_1C_2}{L_4}$$
$$\frac{sC_1C_2}{L_3} + \frac{C_2}{sL_3L_4} + \frac{C_1G_5}{L_4} + \frac{C_2G_5}{L_3} + \frac{C_1G_6}{L_4} + \frac{C_2G_6}{L_3}$$

或 $$\Delta_n = s^2C_1C_2G_5 + s\left(C_1G_5G_6 + C_2G_5G_6 + \frac{C_1C_2}{L_3} + \frac{C_1C_2}{L_4}\right)$$
$$+\left(\frac{C_1G_5}{L_4} + \frac{C_1G_6}{L_3} + \frac{C_1G_6}{L_4} + \frac{C_2G_5}{L_3} + \frac{C_2G_6}{L_3} + \frac{C_2G_6}{L_4}\right)$$
$$+\frac{1}{s}\left(\frac{C_1}{L_3L_4} + \frac{C_2}{L_3L_4} + \frac{G_5G_6}{L_3} + \frac{G_5G_6}{L_4}\right) + \frac{G_6}{s^2L_3L_4}$$

现在来讨论如何求 Δ_n 的余因式。首先求对称的余因式,即 $\mathbf{Y}_n$ 的主对角元素的余因式。设元素为(j,j),它的余因式就是把 $\mathbf{Y}_n$ 的第 j 行和第 j 列划去后所得矩阵的行列式。把 $\mathbf{Y}_n$ 的第 j 行划去,相当于把 $\mathbf{A}$ 的第 j 行划去。令 $\mathbf{A}_{-j}$ 表示把 $\mathbf{A}$ 的第 j 行划去后所得的矩阵。把 $\mathbf{Y}_n$ 的第 j 列划去,相当于把 $\mathbf{A}^T$ 的第 j 列划去,即把 $\mathbf{A}$ 的第 j 行划去。所以,元素(j,j)的余因式可写为

$$\Delta_{jj} = \det(\mathbf{A}_{-j}\mathbf{Y}\mathbf{A}_{-j}^T) \tag{3-8}$$

可以用前面求 Δ_n 的方法来求 Δ_{jj},还可以直接用网络N的图来求 Δ_{jj}。

把网络N的节点 j 与参考节点短接后所得的网络设为N_1。若把新形成的节点作为参考,则 N_1 对此参考节点的节点导纳矩阵 $\mathbf{Y}_{n1}$ 恰好就是

$$\mathbf{Y}_{n1} = \mathbf{A}_{-j}\mathbf{Y}\mathbf{A}_{-j}^T$$

所以把网络N的节点 j 与参考节点合并后所得网络 N_1 的图(设为G_1)，其全部树支导纳乘积之和就是 Δ_{jj}。

下面我们设法直接从N的图G来找图 G_1 的树。G的节点数设为n_t，G_1的节点数为n_t-1；G_1的一个树，其树支数为 $n_t-2=n-1$。G_1 的一个树显然是G的不包含任何回路、且支路数为$(n-1)$的一个子图。所以它在G中将是不连通的，且分为两个部分(其中一个部分可能只是一个孤立节点)。可以看出，在G中 j 与N原来的参考节点(设为v_0)一定属于两个不同的部分；因为在 j 与 v_0 之间不可能存在一条路，如有这种路，则在G_1 中将形成回路，因而就不构成树了。G 的这种子图称为它的一个2-树，且用 2-树 (j, v_0) 表示之，其中 j 与 v_0 之间的逗号表示它们是在G中的两个不同的部分。

可见，图G的一个 2-树是一对包含图G全部节点的不连通且无回路的子图,但每一子图则是连通的(其中一个子图可能只包含一个孤立节点)。显然,移去G的(生成)树的一个边后所形成的子图就是一个 2-树。

例如,对于图 3-13 所示的网络，若以节点 ④ 为参考节点,当 $j=1$ 时,对应 N_1 的图 G_1 将如图 3-14 a 所示。此图的 4 个树是支

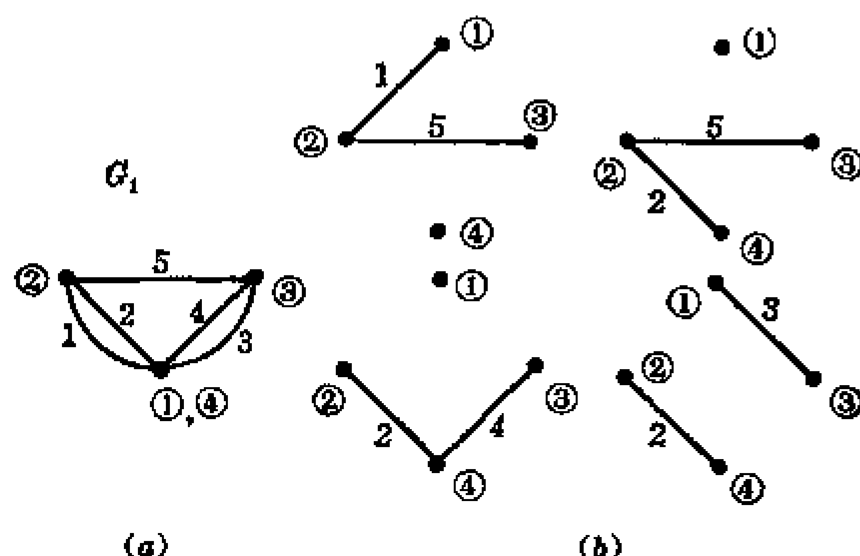


图 3-14　图 3-13 的 2-树(1, 4)

路集合(1,5),(2,5),(2,4),(2,3)。在原来的网络N的图G中,它们分别如图 3-14 b 所示，可见它们是G的 2-树，对每一个这种 2-树来说，节点①和④均在两个不同部分。G_1还有另外四个树，即 (1,4),(1,3),(3,5),(4,5)。把这些 2-树的树支导纳乘积代入式(3-8)的右边,即得 Δ_{jj}。

这样,式(3-8)可用下式来表示

$$\Delta_{jj}=\sum_{\text{全部 2-树}} 2\text{-树}(j,v_0)\text{的树支导纳乘积} \qquad (3\text{-}9)$$

下面来讨论节点导纳矩阵的不对称余因式,即 Δ_{ij}。与 Δ_{jj} 类似,Δ_{ij} 可表示为

$$\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

其中 M_{ij} 为把节点导纳矩阵 $\mathbf{Y}_n$ 的第 i 行和第 j 列划去后所得矩阵的行列式,即

$$M_{ij}=\det(\mathbf{A}_{-i}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T_{-j})$$

运用毕内—柯西定理,得

$$M_{ij}=\sum\{(\mathbf{A}_{-i}\mathbf{Y})\text{和}\mathbf{A}^T_{-j}\text{对应大子式的乘积}\}$$

$\mathbf{A}_{-j}\mathbf{Y}$的非零大子式对应2-树$(i,v_0)$,$\mathbf{A}^T_{-j}$的非零大子式对应 2-树$(j,v_0)$。在上式的乘积中，只有两个对应大子式都是非零时才能存在,所以在计算Δ_{ij}时起作用的 2-树,只能是那些既是 2-树(j,v_0)又是 2-树(j,v_0)的。由于任一个 2-树只包含二部分,而 v_0 必须在其中之一,因此 i 和 j 将一定在同一部分。这种把节点 i 和 j 包含在同一部分的2-树用 2-树(ij,v_0)来表示。只有这种 2-树在计算Δ_{ij}时才起作用,其余都不能出现在公式中。但是 $\mathbf{A}_{-i}$ 和 $\mathbf{A}^T_{-j}$ 是两个完全不同的矩阵，这些 2-树的树支导纳乘积是正是负就必须另行确定。可以证明(但由于过于冗长,故从略,可参阅参考书 2)。

$$M_{ij}=(-1)^{i+j}\sum_{\text{全部 2-树}} 2\text{-树}(ij,v_0)\text{的树支导纳乘积}$$

由此求得

$$\Delta_{ij} = \sum_{\text{全部2-树}} 2\text{ 树}(ij, v_0)\text{的树支导纳乘积} \qquad (3\text{-}10)$$

为了书写简化起见，令

$$V(Y) \triangleq \sum_{\text{全部树}} \text{树支导纳乘积}$$

$$W_{a,b}(Y) \triangleq \sum_{\text{全部2树}} 2\text{ 树}(a, b)\text{的树支导纳乘积}$$

式中W的下标a和b用逗号分开，其含义同前，即表示对应这两个下标的节点必须在网络的图中的两个部分。这样，式(3-7)，(3-9)和式(3-10)可分别记为

$$\Delta = V(Y)$$

$$\Delta_{jj} = W_{j,v_0}(Y)$$

$$\Delta_{ij} = W_{ij,v_0}(Y)$$

有了这些公式，就可以用拓扑的方法来计算某些网络函数。图3-15所示为一个无源的一端口网络P，P的各支路之间不存在互感。设以电流源I_1供此网络，$U_{11'}$为入端1—1′的电压，则P的驱点导纳函数为

$$Y_d(s) = \frac{I_1(s)}{U_{11'}(s)}$$

式中$I_1(s)$，$U_{11'}(s)$分别为电流和电压的象函数。若以节点1′为参考，则不难得出驱点导纳函数为

$$Y_d = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

其中Δ为节点导纳矩阵的行列式，而Δ_{11}则为对应元素(1, 1′)的

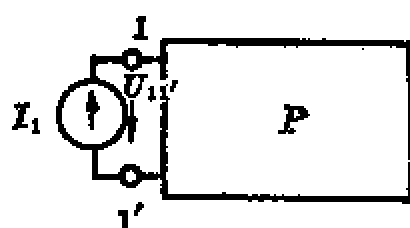


图3-15　驱点导纳函数

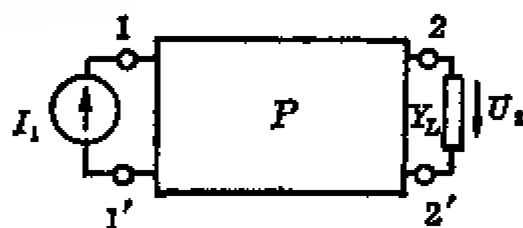


图3-16　转移函数

余因式。这样，Y_d 可写为

$$Y_d = \frac{V(Y)}{W_{1,1'}(Y)}$$

同样的思路可以用来求二端口网络的转移函数。在图 3-16 中，无源二端口网络的 1—1′ 端用电流源 I_1 供给，负载用导纳 Y_L 来表示。设以节点 1′ 为参考，对网络 P（包括 Y_L）写出节点方程后，可求得

$$U_2(s) = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{12'}}{\Delta} I_1(s)$$

$$Z_{21} = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{12'}}{\Delta}$$

Z_{21} 为 1—1′ 和2—2′ 之间的转移阻抗函数。运用前面的拓扑公式，得

$$Z_{21} = \frac{W_{12,1'}(Y) - W_{12',1'}(Y)}{V(Y)}$$

如果节点 1′ 和 2′ 不是直接联接的，则上式的分子中将可能有相互抵消的项。不难看出在 $W_{12,1'}$ 和 $W_{12',1'}$ 中必然都有属于 (122′, 1′) 类型的 2-树，所以它们将相互消去。在 $W_{12,1'}$ 的每个 2-树中，节点 2′ 或与节点 1，2 在一起，或与节点 1′ 在一起，因此可得下列关系式：

$$W_{12,1'}(Y) = W_{122',1'}(Y) + W_{12,1'2'}(Y)$$

同理，在 $W_{12',1'}$ 的每个 2-树中，节点 2 或与节点 1，2′在一起，或与节点 1′ 在一起，因此有

$$W_{12',1'}(Y) = W_{122',1'}(Y) + W_{12',1'2'}(Y)$$

由此可得

$$Z_{21} = \frac{W_{12,1'2'}(Y) - W_{12',1'2}(Y)}{V(Y)}$$

在上式的分子中，将不再存在被消去的相同的 2-树项。另外，容

易看出，由于Y_L接在2—2'之间，所以在计算分子时可只对P进行。

例 3-6 求图 3-17 所示二端口网络的驱点导纳和转移阻抗。设 2—2' 端为开路。

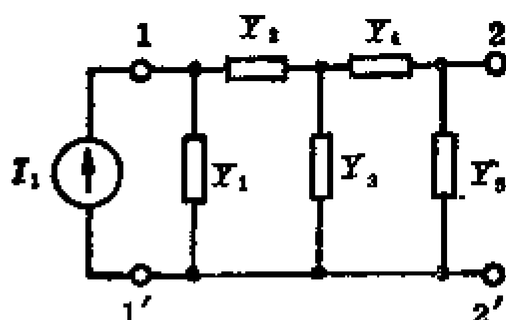


图 3-17 二端口网络的 Y_d 和 Z_{21}

解
$$V(Y)=Y_1Y_2Y_4+Y_1Y_2Y_5+Y_1Y_3Y_4+Y_1Y_3Y_5+Y_1Y_4Y_5+Y_2Y_3Y_4+Y_2Y_3Y_5+Y_2Y_4Y_5$$

$$W_{12,1'}(Y)=Y_2Y_4$$

$$W_{12',1'}(Y)=0$$

$$W_{1,1'}(Y)=Y_2Y_4+Y_3Y_4+Y_3Y_5+Y_4Y_5+Y_2Y_5$$

$$Y_d=\frac{V(Y)}{W_{1,1'}(Y)}$$

$$=\frac{Y_1Y_2Y_4+Y_1Y_2Y_5+Y_1Y_3Y_4+Y_1Y_3Y_5+Y_1Y_4Y_5+Y_2Y_3Y_4+Y_2Y_3Y_5+Y_2Y_4Y_5}{Y_2Y_4+Y_3Y_4+Y_3Y_4+Y_4Y_5+Y_2Y_5}$$

$$Z_{21}=\frac{W_{12,1'}(Y)-W_{12',1'}(Y)}{V(Y)}$$

$$=\frac{Y_2Y_4}{Y_1Y_2Y_4+Y_1Y_2Y_5+Y_1Y_3Y_4+Y_1Y_3Y_5+Y_1Y_4Y_5+Y_2Y_3Y_4+Y_2Y_3Y_5+Y_2Y_4Y_5}$$

注意，以上的拓扑公式是在无互感及无受控源的情况下得出的。当网络中有互感及受控源时，支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵均将是非对角阵。有关的拓扑公式比较复杂，这里不再介绍。

§3-7 回路阻抗行列式的拓扑公式

回路阻抗矩阵的行列式的拓扑公式，其推导过程与节点导纳行列式是类似的，但是行列式的值与所选的回路有关(见§3-8)。本节只介绍 f-回路矩阵的行列式。

如用Δ_l来表示回路阻抗行列式，则

$$\Delta_l = \det \mathbf{BZB}^T$$
$$= \sum\{(\mathbf{BZ})\text{和}\ \mathbf{B}^T\ \text{对应大子式的乘积}\}$$

对于无互感以及无受控源的网络，支路阻抗矩阵是对角阵，矩阵乘积 **BZ** 与 **B** 的差别仅在于 **B** 的第 j 列被支路阻抗 Z_j 相乘，$j=1,2,\cdots,b$，而 **BZ** 与 **B** 的结构则完全相似。**B** 的非零大子式，按定理 2-5，是与图的补树有一一对应的关系，但是其值并不一定等于 ±1（与 **A** 的情况不同）。但是，如果所选回路是 f-回路或是平面网络的网孔，则大子式值是 ±1(§ 3-8)。因此，与推导节点导纳行列式相似，对于 f 回路或网孔来说，有

$$\Delta_l = \sum_{\text{全部树}} \text{网络的连支阻抗乘积} \tag{3-11}$$

上式中，所谓连支阻抗乘积即对应一个给定树的全部连支阻抗的乘积。式(3-11)有时称为基尔霍夫公式（或规则）。所以，只要列出全部树，算出其对应补树的连支阻抗乘积，这些乘积之和即 Δ_l。

例如，对于图 3-13 所示网络来说，全部补树为(2,4,5),(3,4,6),(1,2,6),(1,3,5),(2,3,4),(1,2,4),(1,3,4),(1,2,3),(2,5,6),(3,5,6),(4,5,6),(1,5,6),(2,3,6),(1,4,6),(2,3,5),(1,4,5)。因此，按式(3-11)，经整理后，有

$$\Delta_l = s^2 L_3L_4R_6 + s\left(\frac{L_3L_4}{C_1} + \frac{L_3L_4}{C_2} + L_3R_5R_6 + L_4R_5R_6\right)$$
$$+\left(\frac{L_3R_5}{C_1} + \frac{L_3R_5}{C_2} + \frac{L_3R_6}{C_2} + \frac{L_4R_5}{C_1} + \frac{L_4R_6}{C_2} + \frac{L_4R_6}{C_1}\right)$$
$$+\frac{1}{s}\left(\frac{L_3}{C_1C_2} + \frac{L_4}{C_1C_2} + \frac{R_5R_6}{C_1} + \frac{R_5R_6}{C_2}\right) + \frac{R_6}{s^2C_1C_2}$$

由于对每一支路来说，有 $ZY=1$，因此，如果用全部支路阻抗乘积（即 $Z_1Z_2\cdots Z_b$）去乘一个树的树支导纳乘积，所得结果将是此树的补树的连支阻抗乘积。Δ_n 为全部树支导纳乘积之和，故用

$(Z_1Z_2\cdots Z_b)$ 去乘 Δ_n 所得的结果将是全部连支阻抗乘积之和，即 Δ_l。所以，

$$\Delta_l=(Z_1Z_2\cdots Z_b)\Delta_n$$

支路阻抗矩阵 $\mathbf{Z}$ 为对角阵，$\det\mathbf{Z}=Z_1Z_2\cdots Z_b$，上式可写为

$$\Delta_l=(\det\mathbf{Z})\Delta_n$$

以上所得的两个公式说明 Δ_n 和Δ_l 之间存在着一个简单的关系。

回路阻抗行列式的对称余因式 Δ_{jj} 可以用类似的方法求出。余因式 Δ_{jj} 是对回路阻抗矩阵 $\mathbf{Z}$ 的第(j,j)元素来考虑的，只有在下列情况下 Δ_{jj} 才有意义，即第 j 回路中有一条支路 k，它仅属于第 j 回路而不属于其他任何回路。所以，应当假设有这样一条支路 k，它只在第 j 回路而不在其他回路中。这样，

$$\Delta_{jj}=\det(\mathbf{B}_{-j}\mathbf{Z}\mathbf{B}_{-j}^T)$$

其中 $\mathbf{B}_{-j}$ 就是把$\mathbf{B}$ 中第 j 行划去后所得的矩阵。从矩阵中划去第 j 行，也就是把网络中的第 j 回路去掉，而要把第 j 回路去掉，只要把支路 k 移去。设把支路 k 移去后的网络用 N_1 表示，则

$$\Delta_{jj}=\sum N_1\text{的全部连支阻抗乘积}$$

回路阻抗矩阵$\mathbf{Z}$的不对称余因式的拓扑公式以及它的推导过程都比较复杂，这里不再介绍。

前面已经指出，这类拓扑公式有一个很大的弱点，即必须找遍网络全部有关的树。虽然目前有比较有效的方法，且可利用计算机来寻找这些树，但是一个网络的全部树的数量一般过大，因此用这种方法去分析节点或支路数较多的网络是不相宜的。

§3-8　网络行列式的不变性

前二节讨论了节点导纳行列式和回路阻抗行列式的拓扑公式。对节点导纳行列式来说，它不会随参考节点的选择不同而有所不同，但是对回路阻抗行列式或割集导纳行列式（后者在前二

节中未予讨论），它们将会随回路或割集的选择而改变，不过仅差一个因子而已。本节将证明这一点，并简要地讨论这个很有意义的问题。上述这些行列式可以统称为网络行列式。网络行列式的零点表示网络的自然频率，这些自然频率确定了网络的自然响应。如果行列式随参考节点，回路或割集的选择而变，则自然响应将随这种选择而改变，这是很难理解的。本节的内容将对此做出回答。

一个矩阵，如果它的每一个方子矩阵的行列式值为+1、−1或0，则此矩阵称为全么模阵。可以证明，如果一个非奇异方子矩阵是全么模的，则其逆阵也是全么模的①。

前面，已经证明连通图G的关联矩阵$\mathbf{A}$是全么模阵。现在来证明，G的f-回路矩阵$\mathbf{B}_f$和f-割集矩阵$\mathbf{Q}_f$也是全么模阵。设G的关联矩阵$\mathbf{A}$的列按先连支后树支的次序排列，即令

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{11} \vdots \mathbf{A}_{12}]$$

式中$\mathbf{A}_{12}$为对应一个树T的树支的大子矩阵。设f-回路矩阵$\mathbf{B}_f$是按T定义的。令一个非奇异矩阵$\mathbf{F}$为

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\end{bmatrix}$$

由于$\mathbf{A}$是全么模的，所以如把$\det\mathbf{F}$按拉普拉斯公式展开，不难看出$\mathbf{F}$也是全么模的。$\mathbf{F}$的逆阵$\mathbf{F}^{-1}$为

$$\mathbf{F}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}_l & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}^{-1}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}^{-1}$应当是全么模的。全么模阵的子矩阵也应当是全么模的，所以子矩阵

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}_l \\ -\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}\end{bmatrix}$$

---

① 证明要用到Jacobi's Theorem，见A. C. Aitken, Determinants and Matrices, 9th ed., 1962。

将是全么模的，但是它恰好就是 $\mathbf{B}_f^T$，可见 $\mathbf{B}_f$ 也是全么模的。

以树 T 为基础的 f 割集矩阵 $\mathbf{Q}_f$ 可写为

$$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11} \quad \mathbf{1}_n]$$

但是 $\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}_{11}$ 是全么模的，故 $\mathbf{Q}_f$ 也是全么模的。

按§2-3，§2-4，有 $\mathbf{B}=\mathbf{C}\mathbf{B}_f$ 和 $\mathbf{Q}=\mathbf{D}\mathbf{Q}_f$，其中 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为非奇异矩阵。另外，按定理 2-5 和2-8 回路基矩阵 $\mathbf{B}$ 和割集基矩阵 $\mathbf{Q}$ 的大子矩阵的列分别与 G 的一个补树和树对应。如用 $\mathbf{B}(I_l)$ 和 $\mathbf{Q}(J_n)$ 分别表示 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的大子矩阵（l 为 $\mathbf{B}$ 的秩，n 为 $\mathbf{Q}$ 的秩），将有

$$\mathbf{B}(I_l)=\mathbf{C}\mathbf{B}_f(I_l)$$

$$\mathbf{Q}(J_n)=\mathbf{D}\mathbf{Q}_f(J_n)$$

如果令 $\mathbf{B}$ 中的一个大子矩阵 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{B}_f$ 中的单位子矩阵 $\mathbf{1}$ 相对应，即两者的列对应定义单位阵的同一补树，则将有 $\mathbf{M}=\mathbf{C}$。同理，如果令 $\mathbf{Q}$ 中的一个大子矩阵 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{Q}_f$ 中的单位子矩阵 $\mathbf{1}$ 相对应，即两者的列对应定义单位阵的同一树，则有 $\mathbf{N}=\mathbf{D}$。

由于 $\mathbf{B}_f$ 和 $\mathbf{Q}_f$ 都是全么模阵，可见 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的所有大子矩阵的行列式将分别具有相同的值。$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的元素为 +1、−1 和 0，故如果令

$$k(\mathbf{B})=(\det\mathbf{B}(I_l))^2$$

$$k(\mathbf{Q})=(\det\mathbf{Q}(J_n))^2$$

则不难看出 $k(\mathbf{B})$ 和 $k(\mathbf{Q})$ 将是整数的平方。

例如，对于图 3-18a 所示的图 G，如选支路(5，6，7，8)为树，则 f-回路矩阵将是

$$\mathbf{B}_f=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

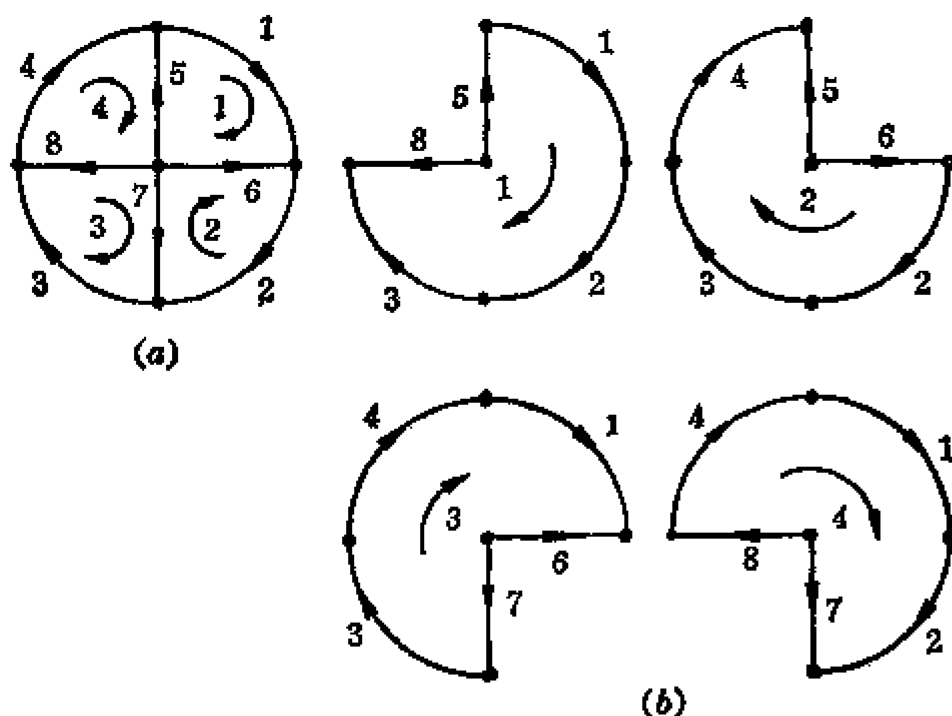


图 3-18　$k(\mathbf{B})=9$ 的例子

如按图 3-18b 所示的回路写出回路基矩阵 B，有

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\mathbf{B}= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

所以，

$$
\mathbf{M}-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

不难验证　　　　$\mathbf{B}\quad\mathbf{M}\mathbf{B}_f$

同时有　　　　$\det\mathbf{M}\ \cdot 3$

而对所有 B 的大子矩阵，有

$$k(\mathbf{B})=9$$

显然，由于 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}_f$ 和$\mathbf{Q}_f$ 都是全么模的，所以

$$k(\mathbf{A})=1 \qquad k(\mathbf{B}_f)=1 \qquad k(\mathbf{Q}_f)=1$$

图G的任何B和Q，其$k(\mathbf{B})$和$k(\mathbf{Q})$的极小值是1。只要B和Q的大子矩阵，$\mathbf{B}(I_l)$和$\mathbf{Q}(J_n)$，其$\det\mathbf{B}(I_l)=\pm1$和$\det\mathbf{Q}(J_n)=\pm1$，则$k(\mathbf{B})$和$k(\mathbf{Q})$将具有其极小值。这种情况并不局限于$\mathbf{B}_f$和$\mathbf{Q}_f$。例如，对于平面网络，网孔矩阵$\mathbf{B}_m$的$k(\mathbf{B}_m)=1$（下面即将证明），而$\mathbf{B}_m$不一定是f-回路矩阵。

如果图G的一个回路基矩阵B含有一列，其中只有一个非零元素，把对应此非零元素的行和列划去后所得的矩阵设为$\mathbf{B}_1$，则不难得出

$$k(\mathbf{B})=k(\mathbf{B}_1)$$

这个过程可以对$\mathbf{B}_1$重复，一直到所得的矩阵中不再有这种列。上面所叙述的内容，从图G来看，就是说在G中存在一个回路L_1，其中有一条支路b_1只在L_1而不在其他回路中；这样在矩阵B中，对应支路b_1的列中将只有一个非零元素，其位置恰好在对应L_1的行中。把这个元素划去，相当于把支路b_1从G中移去，回路L_1也不再存在。$\mathbf{B}_1$就是剩下的图G_1的一个回路基矩阵。如果G_1中又有一个回路L_2，L_2含有一条支路b_2而b_2只在L_2中，那么在$\mathbf{B}_1$中将有一列，其中只有一个非零元素。这样，把支路b_2移去，相当于把$\mathbf{B}_1$中的对应那个非零元素的行和列划去。如此继续下去，设最后剩下的图为G_r，它的相应回路基矩阵为$\mathbf{B}_r$，则$k(\mathbf{B})=k(\mathbf{B}_r)$。如果$G_r$不再包含任何回路，或$\mathbf{B}_r$为零矩阵，则$k(\mathbf{B})=1$。

对于平面网络来说，以图3-6为例，其网孔矩阵为

$$\mathbf{B}_m=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

如果用上述的步骤把 $\mathbf{B}_m$ 逐步划去，最后得到 $k(\mathbf{B}_r)=1$，也即 $k(\mathbf{B}_m)=1$。在§3-3 中已指出过网孔矩阵的一般结构，那些与外网孔（即无限面）有关的支路将对应 $\mathbf{B}_m$ 中那些只有一个非零元素的列。把这些支路移去，将产生新的这类支路。这个过程可以继续下去直到无回路为止。所以 $k(\mathbf{B}_m)=1$ 是一般结论。因此，对于一个平面图 G，网孔矩阵 $\mathbf{B}_m$ 是 G 的回路基矩阵，且其 $k(\mathbf{B}_m)=1$。但是，应注意 $\mathbf{B}_m$ 不是 f-回路矩阵。

对于图 G 的割集基矩阵 $\mathbf{Q}$，将有类似的情况，即如在 $\mathbf{Q}$ 中有一列只含有一个非零元素，把对应此非零元素的行和列划去后，所得的矩阵设为 $\mathbf{Q}_1$，则 $k(\mathbf{Q})=k(\mathbf{Q}_1)$。这里，与前面所讨论的差别仅在于划去的过程是把有关支路短接，而不是把支路移去。

显然，上述过程对矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}_f$ 和 $\mathbf{Q}_f$ 都是同样适用的，且用这种方法不难得出 $k(\mathbf{A})=k(\mathbf{B}_f)=k(\mathbf{Q}_f)=1$ 的结论。

下面，进一步讨论网络行列式的问题。设对应电网络 N 的连通图为 G，并令 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 为 G 的两个回路基矩阵，$\mathbf{Q}_1$ 和 $\mathbf{Q}_2$ 为 G 的两个割集基矩阵。可以证明：

$$k(\mathbf{B}_2)\det\mathbf{B}_1\mathbf{Z}\mathbf{B}_1^T = k(\mathbf{B}_1)\det\mathbf{B}_2\mathbf{Z}\mathbf{B}_2^T$$

$$k(\mathbf{Q}_2)\det\mathbf{Q}_1\mathbf{Y}\mathbf{Q}_1^T = k(\mathbf{Q}_1)\det\mathbf{Q}_2\mathbf{Y}\mathbf{Q}_2^T$$

下面将只讨论回路部分的证明，割集部分的证明完全类似。设 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 分别为 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 中对应一个树的大子矩阵，并设 $\mathbf{B}_f$ 是依据这个树写出的 f-回路矩阵，有

$$\mathbf{B}_f=\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{B}_1=\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{B}_2$$

$$\begin{aligned}\det\mathbf{B}_1\mathbf{Z}\mathbf{B}_1^T &= \det[(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{B}_2)\mathbf{Z}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{B}_2)^T] \\ &= \det[\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1})(\mathbf{B}_2\mathbf{Z}\mathbf{B}_2^T)(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1})^T] \\ &= (\det\mathbf{M}_1/\det\mathbf{M}_2)^2\det\mathbf{B}_2\mathbf{Z}\mathbf{B}_2^T \\ &= (k(\mathbf{B}_1)/k(\mathbf{B}_2))\det\mathbf{B}_2\mathbf{Z}\mathbf{B}_2^T\end{aligned}$$

所以有

$$k(\mathbf{B}_2)\det\mathbf{B}_1\mathbf{Z}\mathbf{B}_1^T=k(\mathbf{B}_1)\det\mathbf{B}_2\mathbf{Z}\mathbf{B}_2^T$$

显然，当且仅当 $k(\mathbf{B}_1)=k(\mathbf{B}_2)$及 $k(\mathbf{Q}_1)=k(\mathbf{Q}_2)$时，有

$$\det\mathbf{B}_1\mathbf{Z}\mathbf{B}_1^T=\det\mathbf{B}_2\mathbf{Z}\mathbf{B}_2^T$$

$$\det\mathbf{Q}_1\mathbf{Y}\mathbf{Q}_1^T=\det\mathbf{Q}_2\mathbf{Y}\mathbf{Q}_2^T$$

由于 $k(\mathbf{B}_f)=k(\mathbf{Q}_f)=1$，且对任何 f-回路矩阵和 f-割集矩阵都成立，因此对应 f-回路和 f-割集的网络行列式将不随 f-回路和 f-割集的选择而改变。

对于一个给定网络来说，如 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Y}$ 已知，则网络行列式将决定于回路或割集的选择。对应f-回路矩阵和 f-割集矩阵的网络行列式将是极小值，且称为其基值。对于任何其他回路基矩阵和割集基矩阵，则相应行列式 $\det\mathbf{BZB}^T$ 和 $\det\mathbf{QYQ}^T$ 将分别是 $k(\mathbf{B})\det\mathbf{B}_f\mathbf{Z}\mathbf{B}_f^T$ 和 $k(\mathbf{Q})\det\mathbf{Q}_f\mathbf{Y}\mathbf{Q}_f^T$，即等于一个整数的平方乘基值，此整数的平方即 $k(\mathbf{B})$和 $k(\mathbf{Q})$。

由此可见，任何两个回路阻抗矩阵的行列式和两个割集导纳矩阵的行列式之间存在着一个实常数的比例关系。

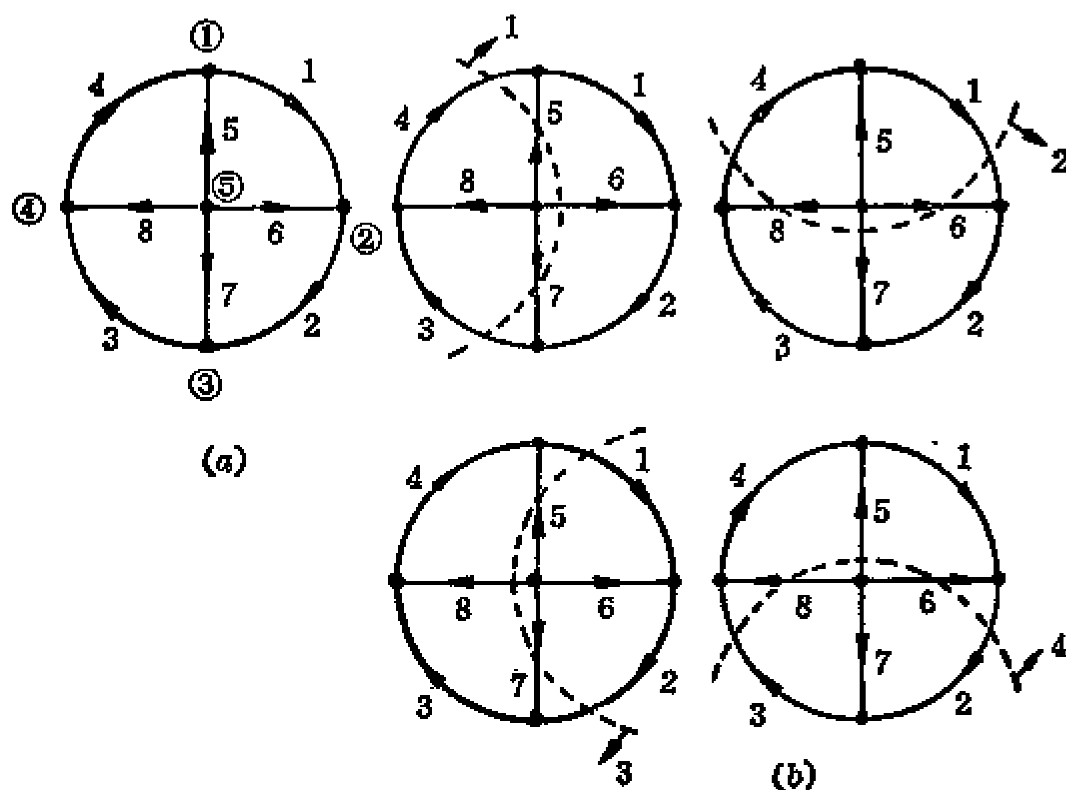


图 3-19 求$\det\mathbf{QYQ}^T$

下面通过一个具体例子来说明上述内容。图 3-19a 所示为一个电导网络的图G(与图 3-18a 相同)。如果所选的独立割集如图 3-19b 所示，则相应的割集矩阵为：

$$\mathbf{Q}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

为了简化起见，设每个支路电导均为 1 西门子，则割集导纳矩阵为

$$\mathbf{QYQ}^T=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$k(\mathbf{Q})=3^2=9$。$\det\mathbf{QYQ}^T=405$。

如果以节点 5 为参考，写出节点导纳矩阵，则应有

$$\mathbf{AYA}^T=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det\mathbf{AYA}^T=45$，此值也即割集导纳矩阵的基值。(若以支路(5,6,7,8)为树，则不难验证相应的 f-割集导纳矩阵的行列式就是此值。)可见，

$$\det\mathbf{Y}_c=k(\mathbf{Q})\det\mathbf{Y}_n$$

如果用拓扑公式，则对任何回路基矩阵 $\mathbf{B}$，有

$$\det(\mathbf{BZB}^T)=k(\mathbf{B})\sum\text{网络的连支阻抗乘积}$$

同理，不难得出，对任何割集基矩阵 $\mathbf{Q}$，有

$$\det(\mathbf{QYQ}^T)=k(\mathbf{Q})\sum\text{网络的树支导纳乘积}$$

最后，可以得出：一个连通图 G 的全部树的数目为 $\det \mathbf{AA}^T$。其证明如下：用毕内一柯西定理，

$$\det \mathbf{AA}^T = \sum (\mathbf{A}\text{ 和 }\mathbf{A}^T\text{ 的对应大子式的乘积})$$

由于当且仅当 $\mathbf{A}$ 的大子矩阵的列对应 G 的一个树时，此大子矩阵才是非奇异的；且由于 $\mathbf{A}$ 是全么模的，因此上式可化为

$$\det \mathbf{AA}^T = \sum_{\text{全部树}} (1) = (\text{树的总数})$$

例如，对于图 2-1 所示的图 G，有

$$\det \mathbf{AA}^T = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

即 G 共有 16 个树。这个图是一个具有 4 个节点的完备图。

对于一个具有 K 个节点的完备图，设其关联矩阵为 $\mathbf{A}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^T$ 的乘积 $\mathbf{AA}^T$ 的元素 a'_{ij} 为

$$a'_{ij} = \sum_{k=1}^{b} a_{ik} a_{jk} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, (K-1)$$

其中 b 为支路的总数。

当 $i = j$ 时，有

$$a'_{ii} = \sum_{k=1}^{b} (a_{ik})^2 \qquad i = 1, 2, \cdots, (K-1)$$

$a_{ik} = 0$ 或 ± 1，视支路 k 是否与节点 i 关联，所以 a'_{ii} 等于与节点 i 关联的支路数。由于是完备图，每一节点上有（$K-1$）条支路，因而

$$a'_{ii} = K-1 \qquad i = 1, 2, \cdots, (K-1)$$

当 $i \neq j$ 时，$a'_{ij} = -1$，这是因为 $a_{ik} = \pm 1$ 时，$a_{jk} = \mp 1$，且只有一条支路与任意两个节点关联。由此可以得出

$$
\mathbf{AA}^T=\begin{bmatrix}(K-1) & -1 & \cdots & -1\\ -1 & (K-1) & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & (K-1)\end{bmatrix}
$$

现在来求 $\det\mathbf{AA}^T$。设另外一个阶数为$(K-1)$的方阵 T，其元素定义如下：

$$
t_{ii}=2,\qquad i<(K-1)
$$

$$
t_{ij}=1,\qquad i\neq j
$$

$$
t_{(K-1),(K-1)}=1
$$

不难证明： $\det\mathbf{T}=1$

矩阵乘积 $\mathbf{TAA}^T$ 为

$$
\mathbf{TAA}^T=\begin{bmatrix}K & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & K & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & K & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}
$$

由此可得

$$
\det\mathbf{TAA}^T=K^{K-2}
$$

但是 $\det\mathbf{TAA}^T=(\det\mathbf{T})(\det\mathbf{AA}^T)$，而 $\det\mathbf{T}=1$，故得

$$
\det\mathbf{AA}^T=K^{K-2}
$$

这就是一个具有 K 个节点的完备图的树的总数。例如，对于一个 $K=10$ 的完备图，树的总数为 10^8 即一亿。当然，这里指的是相异树的总数。

第四章　信号流图和流图

§4-1　信 号 流 图

信号流图是 S. J. Mason 于 1953 年提出的用于分析线性系统的一种方法，其特点是利用一个有向图来描述一些变量之间的关系，当这些关系是线性时，则此有向图就可以用来表示一组联立的线性代数方程。同时，方程组的代数变换将与图的变换具有对应的关系，方程组的求解还可以根据图的结构，凭直观的方法来进行。另外，信号流图把变量描述为沿着支路流动的“信号”，这些“信号”将被它所经过的支路的“特性”所改变，因此，这种有向图可以把它所要描述的物理系统的因果关系清楚地在图上表示出来。

从图论的观点来看，信号流图是一个有向图，其节点(顶点)用来表示所要描述的系统的变量。任一节点 k 带有一个与它相联的量 x_k，称为节点变量或信号，联接节点(x_i, x_j)①的一条弧②带有一个与它相联的量称为增益或传输量 t_{ij}。各不同节点的信号按下列方程相互联系：

$$x_i = \sum t_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots \tag{4-1}$$

换句话说，对每一个节点的 x_i，当 $t_{ij} \neq 0$ 时，则有一条自节点 j 到节点 i 的弧，这条弧的增益即为 t_{ij}；当 $t_{ij} = 0$ 时，则节点 j 到节点 i 不存在弧。这样，节点 x_i 可以看做是“流入”该节点的全部信号的一个迭加点，从节点 x_i“流出”的信号则不计及。按照这种规定，图的每个节点和每条弧都赋有一个量值，这种有向图称为

① 这里，为了方便起见，就用 x_i, x_j 等来表示节点 i, j。

② 信号流图中，有时用“支路”而不用“弧”。

加权图，而由此所得的加权有向图就是一个信号流图。

例如，对于下列代数方程组：

$$x_2 = bx_1 + cx_3$$

$$x_3 = ax_1 + dx_2 + hx_3 + gx_4$$

$$x_4 = ex_2 + fx_3$$

其信号流图将如图 4-1 所示（图中每一条弧的增益在该弧旁标出）。

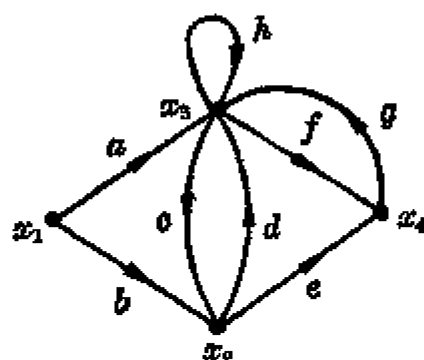


图 4-1　信号流图

如果一个节点是一条或多条弧的终点，则该节点称为非独立节点，与每一个非独立节点相联的有一个显式方程。此方程说明该节点的信号是内向过该节点的全部弧的信号之代数和，每个进入的信号等于它所经过的弧的增益与弧的起点信号之乘积。在每个节点上，不存在类似基尔霍夫电流定律的关系，这是因为通过以该节点为起点的那些弧的“信号”并不计及在内。另外，应注意，节点信号在一个方程中以非独立变量形式出现，而在另外的一些方程中则以独立变量形式出现；所以非独立节点信号，作为其他节点信号为“起因”而形成的“结果”只出现在一个方程中，在其他方程中，它以“起因”的形式出现。这种用“因果关系”的形式来描述一个物理系统的性状，有时是很有用的。

在信号流图中，凡是过一个节点的弧都是外向的（即都以该节为起点），则此节点称为“发点”；凡是过一个节点的弧都是内向的（即都以该节点为终点），则此节点称为“收点”。发点的信号是代数方程中独立变量，发点信号可以看做为输入；收点的信号可以看做为输出。如果要以某一节点变量 x_a 作为输入，而此节点不是发点，可以在图中引进一个虚设的节点 x_i，并加一条增益为1的弧(x_i, x_a)，如图 4-2 所示，x_i 就成为图的发点。同理，如果要以某一节点变量 x_c 作为输出，则可以加一条增益为 1 的弧(x_c, x_o)，如图 4-2 所示，x_o 就成为图的输出。这样，如果我们要求输出和输入的关系，

或者系统的传递函数，就相当于以 x_i 作为独立变量而解出 x_o。

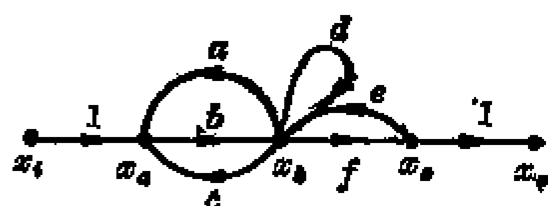


图 4-2　发点和收点

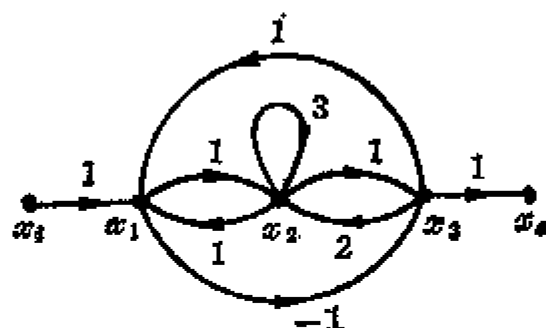


图 4-3　$\frac{x_o}{x_i}=-\frac{1}{2}$

以图 4-3 所示的信号流图为例，它所表示的代数方程为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2+x_3+x_i \\ x_2 &= x_1+3x_2+2x_3 \\ x_3 &= -x_1+x_2 \end{aligned}\right\} \tag{4-2}$$

不难求出 $x_3=-\frac{1}{2}x_i$。若以 x_3 作为输出，虚设 x_o 如图中所示，则 $x_o=x_3$，故 $x_o=-\frac{1}{2}x_i$， 或$\frac{x_o}{x_i}=-\frac{1}{2}$。

按传递函数的定义，当其他输入为零时，它是输出与输入的比，因此下面将只考虑单输入的情况。如果所研究的系统具有多个输入，则可利用迭加原理，按单个输入分别来考虑。

设描述一个线性系统的代数方程组是用下列矩阵形式来表示的：

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}u$$

其中 $\mathbf{A}$ 为一个 $n\times n$ 阶矩阵，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 为 n 阶列向量，而 u 为标量输入。下面介绍如何根据这个方程组来写出对应的信号流图。为了把上式与式(4-1)相对应，把它改写为

$$\mathbf{x}=(\mathbf{1}+\mathbf{A})\mathbf{x}-\mathbf{b}u \tag{4-3}$$

或

$$\mathbf{x}=[\mathbf{1}+\mathbf{A}\ \vdots\ -\mathbf{b}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \cdots \\ u\end{bmatrix}$$

其中用了一个 n 阶列向量 $\mathbf{b}$ 把 $n\times n$ 阶矩阵 $(\mathbf{1}+\mathbf{A})$ 增广。如果定义一个矩阵 $\mathbf{C}$，使

$$\mathbf{C}=[\mathbf{1}+\mathbf{A}\ \vdots\ -\mathbf{b}]$$

这样，得

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j+c_{i,n+1}u \quad i=1,2,\cdots,n \tag{4-4}$$

其中

$$c_{ij}=\delta_{ij}+a_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,n;\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$$

$$c_{i,n+1}=\quad b_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

若定义 $u=x_{n+1}$

则式(4-4)可写为

$$x_i=\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x_j \qquad i=1,2,\cdots,n$$

把此式与式(4-1)比较，可见 $c_{ij}\neq 0$ 时表示 c_{ij} 为 x_j 到 x_i 的弧的增益，$j=1,2,\cdots,n+1$。若 $c_{ij}=0$ 则表示 x_j 和 x_i 之间没有弧。所以可以根据矩阵 $\mathbf{C}$ 来构成所需的信号流图。矩阵 $\mathbf{C}$ 描述了图的关联性质以及弧的权，有时称之为连接矩阵。

作为例子，若把前面的方程组(4-2)看作是式(4-3)的形式，则有

$$\mathbf{1}+\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad -\mathbf{b}\ \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$u=x_1$$

由此，得

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

不难验证，根据矩阵 $\mathbf{C}$ 可得图 4-3 所示的信号流图。

对于电网络来说，信号流图往往可以直接按电网络画出，而不必列出网络方程后，再按照上述方法来进行。本书中将不介绍这方面的内容，有兴趣的读者可参阅有关书籍。

另外，值得指出的是：前面所介绍的信号流图是按照线性关系来定义的。事实上，完全可以按照任何函数关系来定义，就是说，可以写，例如

$$x_j = f_j(x_i, x_k)$$

这表示节点 x_j 是以节点 x_i 和 x_k 为起点的两条弧的终点，$f_j(\cdot)$ 则表示某种函数关系。同样，节点 x_i 本身与其他节点有类似的函数关系，节点 x_k 也是如此，等等。例如，对于图 4-4 所示的信号流图，有

$$x_2 = f_2(x_1, x_3)$$

$$x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$



图 4-4 有函数关系的信号流图

如果以 x_1（发点）为输入，x_3 为输出，则把 x_2 代入后一关系式，得

$$x_3 = f_3(x_1, f_2(x_1, x_3), x_3) = F_3(x_1, x_3)$$

一般说来，不能简化为一个显式。

§4-2 Mason 公式

Mason 公式是用来计算一个信号流图的增益 $\frac{x_o}{x_i}$，即输出节点变量 x_o 与输入节点变量 x_i 之比。在介绍此公式之前，先对信号流图的一些常用术语加以解释。

信号流图是一种有向图，故所涉及的概念都应按有向图来考虑，但是它常用术语的名称又与图论中通常所用的有所差别。下面给出一些常用术语：

（1）路（或有向路），即有向图的初级有向链；

(2) 路径增益(P),即路中弧的增益乘积;

(3) 回路(或反馈回路),即有向图的初级闭合有向链;

(4) 回路增益(L),即回路中弧的增益乘积。

今后,有时把路和路径增益,以及回路和回路增益不加区别地加以引用,例如当提到路 P_1 和 P_2 之和,事实上是指路径增益之和。

另外,当提到前向路时,是指自发点(输入)到收点(输出)的一条路及其路径增益。

若一组回路不具有公有节点,则称它们是非切触回路。当任两个回路不具有公有的节点时,则称这两个回路为一组非切触的双重回路。当任三个回路不具有公有的节点时,则称这三个回路为一组非切触的三重回路。余类推。

为了说明以上这些术语,可参阅图 4-5 所示的信号流图。

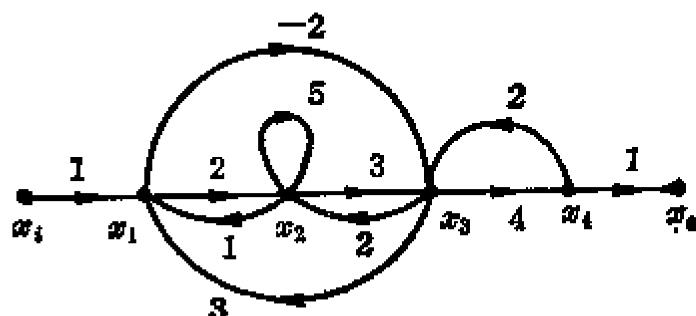


图 4-5 信号流图的 P 和 L

自 x_i 到 x_0 的前向路,有

$$P_1=(1)(2)(3)(4)(1)=24$$

$$P_2=(1)(-2)(4)(1)=-8$$

图 4-6a、b、c、d 为图 4-5 的信号流图中的全部回路中的几个回路,而图 e 则不是一个回路;注意图 c 所示的自环也算作一个回路。

$$L_1=(-2)(3)=-6 \qquad L_2=(2)(1)=2$$

$$L_3=5 \qquad L_4=(-2)(2)(1)=-4$$

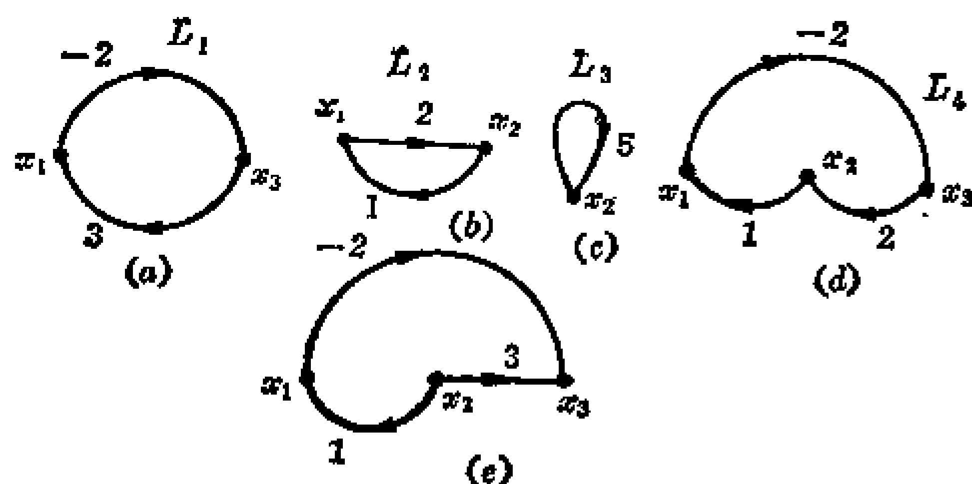


图 4-6　图 4-5 的几个回路

信号流图的求解可以通过图的简化来进行，这种简化称为图的变换。例如，可以把其中的某些节点“去掉”或“吸收”，从而获得一个“剩余图”，在剩余图中余留的只是那些有关的变量，这种过程

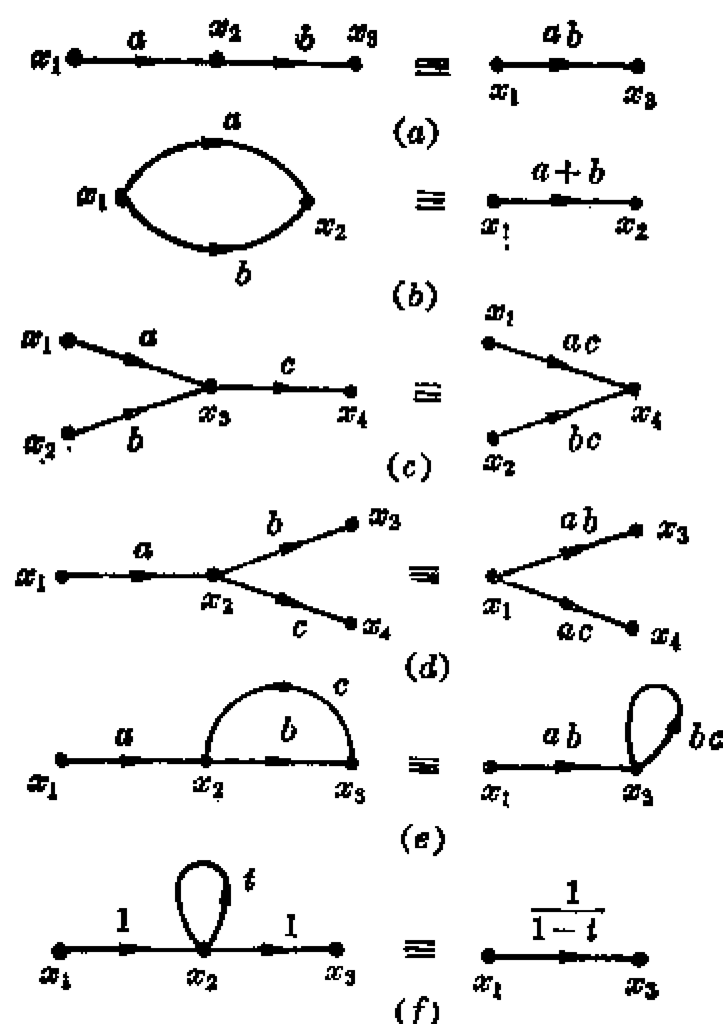


图 4-7　初等变换

相当于求解代数方程组的消去法。如果把足够的节点吸收掉，那么就有可能直接找到所要求的变量的解答。

信号流图的初等变换及其与代数运算的等价关系如图 4-7 中所示，其证明比较简单，读者可自己推导。图中，有些是节点被吸收，有些则是弧被吸收。图 e 中化简后出现了自环，这是因为原来图中存在一个回路。在图 f 中，分析了自环在一个节点上的效应，这里有

$$x_2 = x_1 + t x_2$$

$$x_3 = x_2$$

消去 x_2，得

$$x_3 = \frac{1}{1-t} x_1$$

作为例子，对图 4-8a、b 所示的信号流图，经变换后（见同图 c、d)，就可以方便地求出其增益，结果如下：

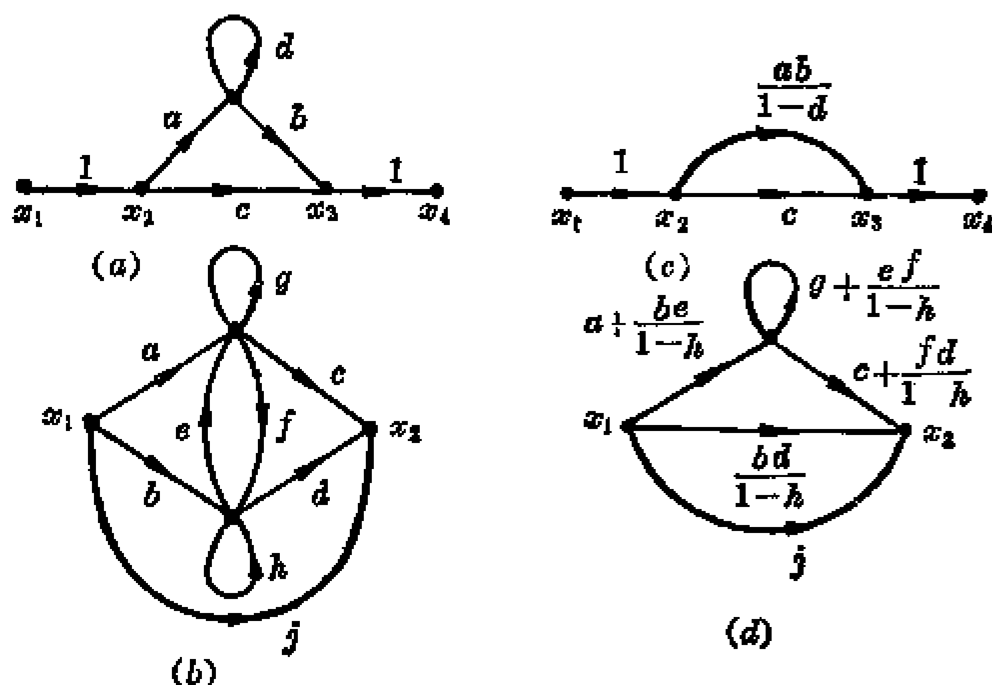


图 4-8 用变换的方法求增益

对图 a 来说，按图 c，有

$$\frac{x_1}{x_4} = c + \frac{ab}{1-d}$$

对图 b 来说，按图 d，有

$$\frac{x_1}{x_2}=j+\frac{bd}{1-h}+\frac{\left(a+\frac{be}{1-h}\right)\left(c+\frac{fd}{1-h}\right)}{1-g-\frac{ef}{1-h}}$$

下面介绍 Mason 公式。设一个信号流图的发点（输入节点）信号为 x_i，收点(输出节点)信号为 x_o，$\frac{x_o}{x_i}$定义为信号流图的增益或传输量 T，即 $T\triangleq\frac{x_o}{x_i}$。用来计算信号流图的增益的 Mason 公式可以表达如下：

$$T=\frac{\sum_m P_m\Delta_m}{\Delta}$$

式中分子的 P_m 是指发点到收点的第 m 前向路径增益，且求和是对全部这种前向路进行的。分母 Δ 称为图的行列式，它由下式给出：

$$\Delta=1-\sum L_k^1+\sum L_k^2-\sum L_k^3+\cdots\cdots$$

其中 L_k^1 表示第 k 回路的增益，而求和$\sum L_k^1$ 是对全部这种回路增益进行的；L_k^2 则表示第 k 组非切触的双重回路增益，它等于该组中两个回路增益的乘积，求和$\sum L_k^2$ 是对全部这类双重回路进行的；L_k^3 则表示第 k 组非切触的三重回路增益，它等于该组中三个回路增益的乘积，求和$\sum L_k^3$ 是对全部这类三重回路进行的；等等。分子中的 Δ_m 是图的一种余因式，把给定的信号流图中的第 m 前向路的全部弧以及与此第 m 路共有一个节点的全部弧移去后得到的子图，此子图的行列式就是 Δ_m。

Mason 公式的证明，可参阅有关书籍。

为了说明 Mason 公式，参考图 4-9 所示信号流图，其增益

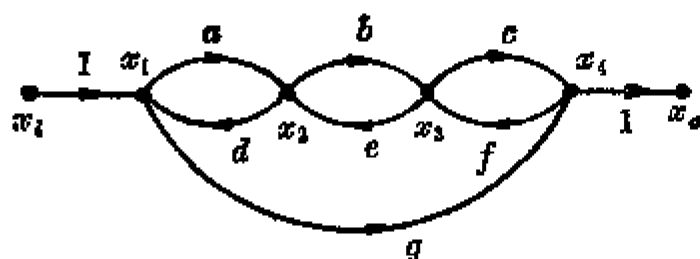


图 4-9 Mason 公式的应用

$T=\frac{x_o}{x_i}=\sum_m P_m\Delta_m/\Delta$，可以求得如下，其中

$$\Delta=1-\sum L_k^1+\sum L_k^2-\sum L_k^3+\cdots\cdots$$

而图中共有 4 个回路，非切触双重回路只有一组，即分别由弧 a、d 和 c、f 所构成，三重以上的非切触回路均不存在，故有

$$\sum L_k^1=ad+be+cf+gfed$$

$$\sum L_k^2=adcf$$

$$\sum L_k^3=\cdots\cdots=0$$

前向路只有二条，即

$$P_1=(1)(a)(b)(c)(1)=abc$$

$$P_2=(1)(g)(1)=g$$

把 P_1 的全部弧以及与它共有一个节点的全部弧移去后将使原图的全部弧均被移去，故有

$$\Delta_1=1$$

同理，对 P_2 来说，余剩的子图将是由弧 b、e 构成的回路，故有

$$\Delta_2=1-be$$

由此得：

$$T=\frac{abc+g(1-be)}{1-ad-be-cf-gfed+adcf}$$

§4-3 信号流图和状态方程

图 4-10 所示用来描述一个控制系统的信号流图是以拉氏变

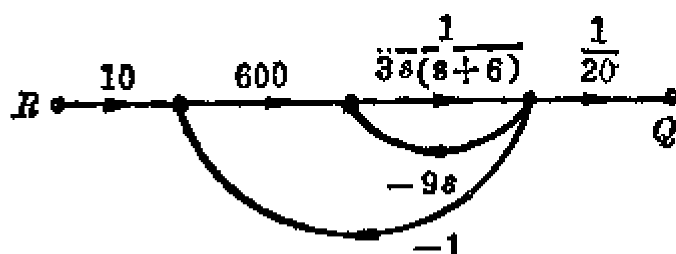


图 4-10 拉氏变换形式信号流图

换形式画出的。用 Mason 公式求 $\frac{Q}{R}$ 时，有

$$\Delta=1-\left[\frac{-9s}{3s(s+6)}+\frac{600(-1)}{3s(s+6)}\right]$$

$$=\frac{s^2+9s+200}{s(s+6)}$$

$$P_1=\frac{10\times 600\times\frac{1}{20}}{3s(s+6)}=\frac{100}{s(s+6)}$$

$$\Delta_1=1$$

故得

$$\frac{Q(s)}{R(s)}=\frac{100}{s^2+9s+200}$$

从这个关系式，可以得出下列微分方程：

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+9\frac{dq(t)}{dt}+200q(t)=100r(t)$$

可见，从信号流图可以导出系统的微分方程。

现在，设有一个常系数的线性微分方程：

$$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+7\frac{dy}{dt}+36y=6\frac{d^2v}{dt^2}+5\frac{dv}{dt}+2v \tag{4-5}$$

对上列方程，用拉氏变换且设所有初始条件均为零，得

$$(s^3+4s^2+7s+36)Y(s)=(6s^2+5s+2)V(s)$$

或

$$\frac{Y(s)}{V(s)}=\frac{6s^2+5s+2}{s^3+4s^2+7s+36}$$

上式的分子和分母均除以 s^3 后，得

$$\frac{Y(s)}{V(s)}=\frac{\frac{6}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{2}{s^3}}{1+\frac{4}{s}+\frac{7}{s^2}+\frac{36}{s^3}} \tag{4-6}$$

把上式与图 4-10 的信号流图的关系式对比，可见表示这个传递函数的信号流图，其结构可使之与图 4-10 有一定的相似性。如果参照 Mason 公式中的 Δ，设想一个信号流图，其回路都是切触的，则不难画出它的一部分如图 4-11a 所示，这部分将与分母对应。

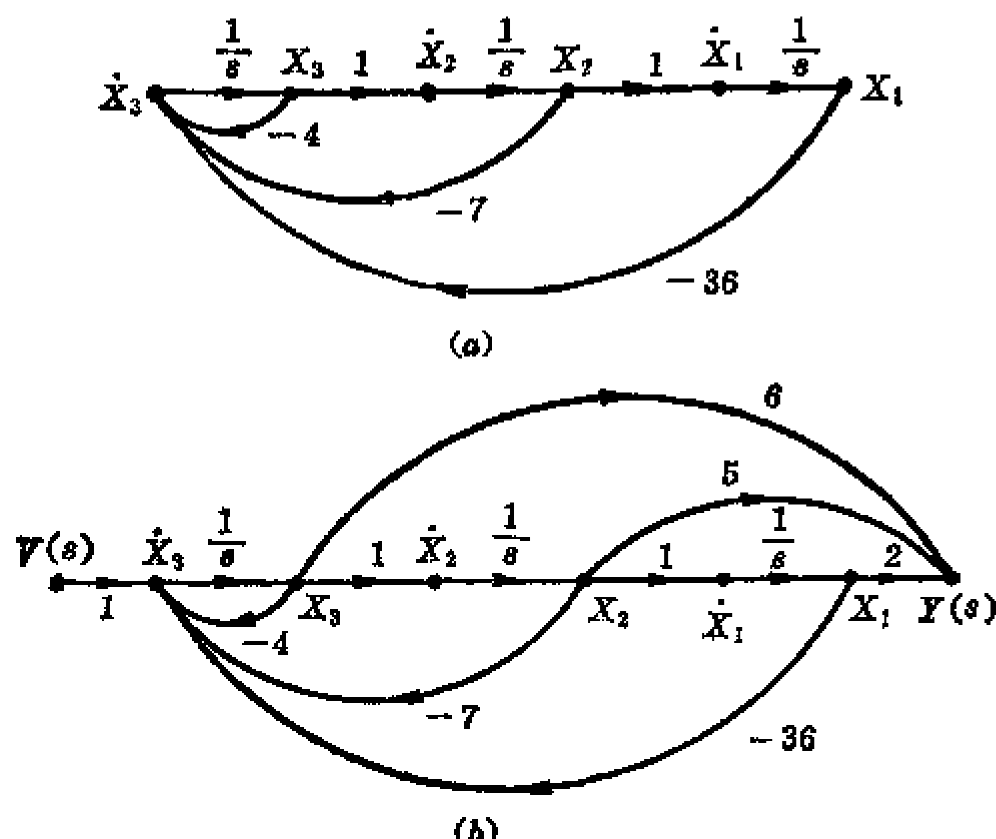


图 4-11 式(4-5)的信号流图

按照分子的要求，增添前向路部分，使其全部的 $\Delta_k=1$，结果将如图 4-11b 所示。应用 Mason 公式，不难验证图 4-11b 确系式(4-6)，故也即式(4-5)的信号流图。内部节点变量 X_1、X_2、X_3 是任意选取的，由于$\frac{1}{s}$在时域中表示积分，故用 $\dot{X}_1$、$\dot{X}_2$和 $\dot{X}_3$ 来表示 x_1、x_2 和 x_3 的导数的象函数。

如果要把式(4-5)化为状态方程形式，则根据图 4-11，直接得

出

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -36x_1 - 7x_2 - 4x_3 + v$$

$$y = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

其中 $$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

令 $\dot{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{x}$ 分别表示 3×1 阶列向量，则有

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}v$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}v$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -36 & 7 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\,2 \quad 5 \quad 6\,] \qquad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$$

以上所得的方程就是以 x 为状态变量的状态方程的标准形式。

对一个单输入、单输出系统，如果输入的最高阶导数比之输出的最高阶导数低一阶，则不难把上述的方法推广到一般情况。设已知

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_1}{s^n + b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \cdots + b_1}$$

表示此传递函数的信号流图可以有两种形式，分别如图 4-12a、b 所示，图中把 $\frac{1}{s}$ 作为积分运算来考虑，所以

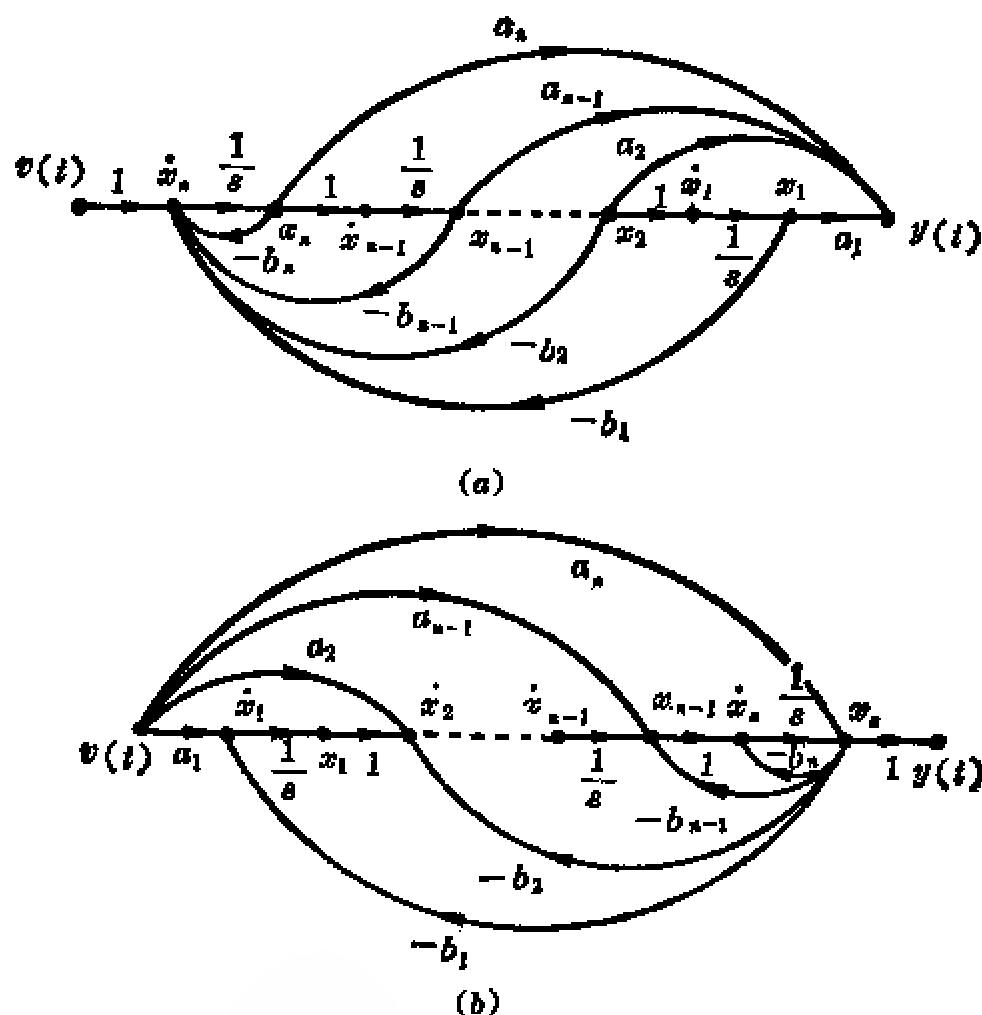


图4 12　两种形式的信号流图

全部变量均用时间函数来表示。根据图4 12a和b，可以得出状态方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}v$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}v$$

对应图a，有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \qquad \mathbf{D} = 0$$

对应图b，有

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -b_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \qquad \mathbf{D}=0$$

如果 y 的最高阶导数的次数为 n，则矩阵 $\mathbf{A}$ 为 $n\times n$ 阶，$\mathbf{B}$ 是 $n\times 1$ 阶，$\mathbf{C}$ 是 $1\times n$ 阶，$\mathbf{D}$ 是 1×1 阶。

以上讨论中，认为系统是可观察和可控制的，即传递函数确实可以用来描述此系统的。

图 4-11、4-12 所示的信号流图有时称为状态转换图。这一节的内容告诉我们如何从一个系统的传递函数得出其状态转换图，又如何由此获得其对应的状态方程。

§4-4 Coates 流图[①]

信号流图是根据"因果"关系画出的，它所依据的代数方程组如式(4-3)所示，即

$$\mathbf{x}=(\mathbf{1}+\mathbf{A})\mathbf{x}-\mathbf{b}u$$

这里，稍带有不太自然的因素在里面。由于一般的代数方程组有如下的形式：

$$\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}u=0 \tag{4-7}$$

所以，如果能直接依据这种形式画出一个有向图，则将具有一定的优越性。Coates 的流图就是按这种思想提出的。把上式改写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-b_iu=0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{4-8}$$

---

① 流图 —Flow Graph

与式(4-7)相联的加权有向图，或 Coates 流图可定义如下：此有向图具有 n 个非输入节点，标为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和一个输入节点，标为u。若设节点变量 x_i 与第 i 方程相对应，则当 $a_{ij} \neq 0$，将有一条自节点 x_j 到节点 x_i 的弧，其权即 a_{ij}，$j=1,2,\cdots,n$；当 $a_{ij}=0$，则节点 x_j 和节点 x_i 之间不存在弧；若 $b_i \neq 0$，则自 u 到 x_i 有一条权为 $-b_i$ 的弧。

举例来说，设线性代数方程组为

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

其对应的 Coates 流图将如图 4-13 所示，其中把输入节点 u定义为 $x_5=1$。

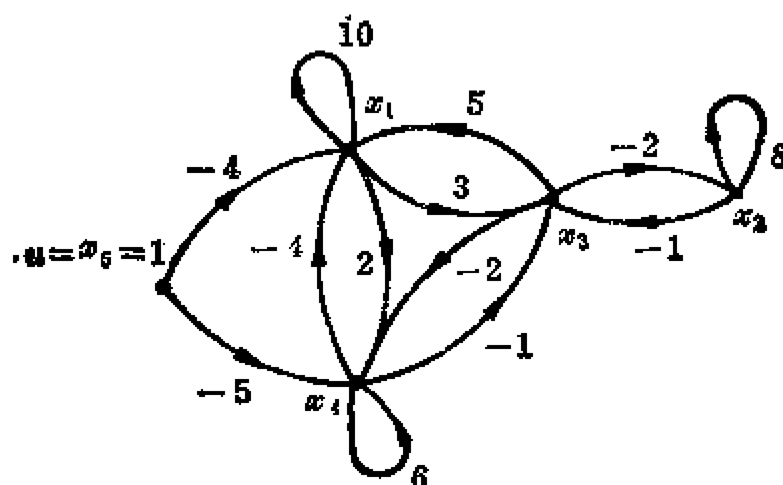


图4-13　Coates 流图

方程组(4-7)可改写为

$$[\mathbf{A} \vdots -\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \cdots \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

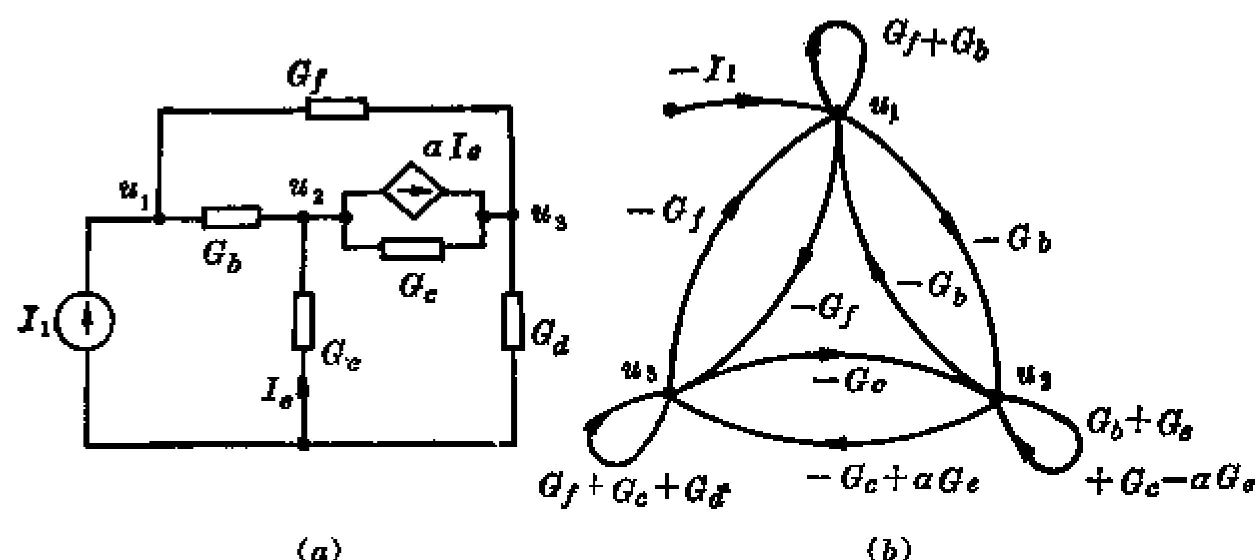
令矩阵 $\mathbf{C} \triangleq [\mathbf{A} \vdots -\mathbf{b}] = [c_{ij}]$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n+1$；则矩阵 C 称为 Coates 流图的连接矩阵。与信号流图的连接矩阵比较，在 Coates 流图的情况下矩阵 A 出现在 C 中，而对信号流图，

则 $\mathbf{1}+\mathbf{A}$ 出现在 $\mathbf{C}$ 中。这样一来，如果令 $u=x_{n+1}$，则 $c_{ij}\neq 0$ 将表示它是节点 x_j 到节点 x_i 的有权弧。可见 Coates 流图可以比较容易地直接从代数方程组画出来。

另外，对电网络来说，往往可以不必列出相应的代数方程组，而从电网络本身直接画出Coates 流图。例如，对于图 4-14a 所示的一个晶体管放大器的等值电路，写出它的节点电压方程，有

$$\begin{bmatrix} G_f+G_b & -G_b & -G_f \\ -G_b & G_b+G_e+G_c-\alpha G_e & -G_c \\ -G_f & -G_c+\alpha G_e & G_f+G_c+G_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 u_1、u_2、u_3 为节点电压变量。对应的Coates 流图将如图 4-14b 所示。这个流图可以从图 4-16a 的电网络直接画出来。



(a) (b)

图 4-14 放大电路的 Coates 流图

关于计算 Coates 流图的增益的拓扑公式以及其证明，可参阅有关书籍。

第五章 网络的流[①]

§5-1 运输网络

本章简要地介绍网络的流及其他有关问题。先从运输网络讲起。设$N(V,A)$[②]是一个连通的、无自环的有向图，其中有一个且仅有一个发点，以v_s(或s)表示之，有一个且仅有一个收点，以v_t(或t)表示之，其余顶点称为中间顶点。每条弧(i,j)赋予一个非负的实数权$c(i,j)$,称为弧(i,j)的容量,一般说来$c(i,j)\neq c(j,i)$。另设一个实数$f(i,j)$,称为弧(i,j)的流,一般说来$f(i,j)\neq -f(j,i)$。为了叙述方便,设X和Y是顶点V的子集合,则(X,Y)表示起点在X中$(i\in X)$,终点在Y中$(j\in Y)$的那些弧的集合；而

$$f(X,Y)\triangleq \sum_{(i,j)\in(X,Y)} f(i,j)$$

即$f(X,Y)$表示起点在X中，终点在Y中的全部弧的流之和。

图N的一个流的模式,简称为N的流，是弧的流的一个集合，用F表示之,即$F=\{f(i,j)\}$。对所有$i\in V$,下式成立:

$$f(i,V)-f(V,i)=\begin{cases} f_{s,t} & \text{当 } i=s \\ 0 & \text{当 } i\neq s \\ -f_{s,t} & \text{当 } i=t \end{cases} \qquad (5\text{-}1a)$$

$$c(i,j)\geq f(i,j)\geq 0 \qquad \text{对所有 } i,j \qquad (5\text{-}1b)$$

式(5-1a)说明，从发点s流出的流为$f_{s,t}$，从收点t流出的流为$-f_{s,t}$，也即流出发点的流等于流入收点的流；对其余任一中间

---

① Flows in Networks

② 这里用N表示一个图,说明它与网络有关

顶点，流入的流等于流出的流，即在每一个顶点，流是守恒的，也就是相当于基尔霍夫电流定律。N 的流 F，如果同时满足式(5-1a)和(5-1b)且 $f_{s,t}$ 是非负数，则称流 F 是相容的，而 $f_{s,t}$ 则称为 F 的值。$f(i,j)$ 可以用来表示例如流过自 v_i 到 v_j 那段弧(i,j)的物资数量，且它不应超过这段弧的容量，而 $f_{s,t}$ 则表示自发点 s 发出的物资数量或到达收点 t 的物资数量。

上述的图N往往称为运输网络。例如，一些港口 a_1、$a_2\cdots a_p$，和 b_1、$b_2\cdots b_q$ 可用N的顶点来表示，设在港口 a_1、$a_2\cdots a_p$ 的某种物资准备通过船只运往港口 b_1、$b_2\cdots b_q$。令 m_i 表示在港口 a_i 准备启运的物资量，而令 d_j 表示港口 b_j 所需要的物资量。两个港口 a_i、b_j 之间的航行通道可用弧(a_i,b_j)来表示，用船只运送物资量的能力则用弧的容量 $c(i,j)$来表示。问题是，这样的设置能否满足一切需要？如何组织运输？为了回答这些问题，设一发点 s，自 s 至任一顶点 a_i，用一条容量为 $c(s,a_i)=m_i$ 的弧联接。另设一收点 t，自任一顶点 b_j 至 t 用一条容量为 $c(b_j,t)=d_j$ 的弧联接（见图 5-1）。这样，问题就归结为求出此网络N的一个极大流（如有可能的话），这个极大流将表示在尽量满足需要的情况下，沿着每条航道通过船只运送的物资量。

显然，运输网络可用来表示的物理模型将是多种多样的。网络的弧可能用来表示城市之间的公路，电讯局之间的通讯线路，网

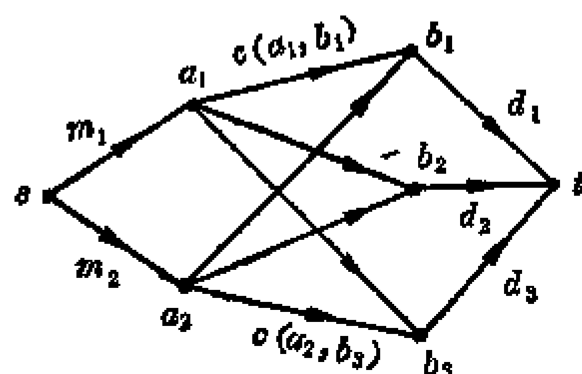


图 5-1 运输网络

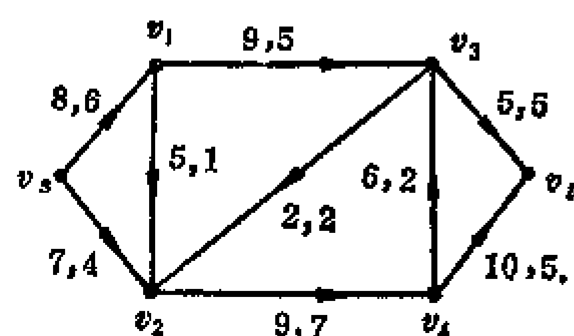


图 5-2 运输网络的流

络的流则可能代表运送的物资量，公路上通过的汽车数量或信息量等。

下面，就一个具体数字例子来说明上述的概念。图 5-2 所示为一个运输网络，弧旁的第一个数字用来表示弧的容量，例如 $c(s,1)=8$，$c(1,3)=9$，$c(2,4)=9$，$c(3,t)=5$ 等。满足条件(5-1a)、(5-1b)的流总是存在的，例如所有弧的流都为零，就是一个相容解。图 5-2 中，弧旁的第二个数字用来表示弧的流，图中数字所表示的是图N一个相容的流(读者可自行检验)。这个流 F 的值 $f_{s,t}$ 为 10。

如果一条弧的流等于该弧的容量，即 $f(i,j)=c(i,j)$，则称弧(i,j)为饱和弧，否则就是非饱和的。例如，图 5-2 中，弧$(3,t)$，$(3,2)$是饱和的，其余弧都是非饱和的。运输网络的一个主要问题是要找出它的一个极大流 F_{max}，即在满足式(5-1a)和(5-1b)的条件下，使 $f_{s,t}$ 极大。式(5-1b)是不等式，所以这个问题是一个典型的线性规划的问题。

为了解决寻找运输网络的极大流问题，先介绍切割的概念，这是下一节的内容。

§5-2 切　割 (*Cut*)

运输网络 $N(V,A)$的一个分离发点 s 和收点 t 的切割K定义为弧的集合$(V_1,\bar{V}_1)$，其中 $s\in V_1$，$t\in\bar{V}_1$，而 V_1 为V的一个子集合，$\bar{V}_1=V-V_1$ 为 V_1 的补集。切割的容量用 $c(V_1,\bar{V}_1)$ 表示，定义为切割的所有弧的容量之和，即

$$c(V,\bar{V}_1)=\sum_{(i,j)\in(V_1,\bar{V}_1)}c(i,j)$$

有时把 $c(V_1,\bar{V}_1)$简写为 $c(K)$。

例如，对于图 5-2 所示的运输网络，一个切割 K_1 是$\{(1,3)$，

(2,4)}，而 $c(K_1)=9+9=18$。另一个切割 K_2 是 {(1,3),(1,2),(s,2)}。注意，切割与割集是两个略为不同的概念。切割 K_1 是按顶点集合 $V_1=\{s,1,2\}$ 及 $\bar{V}=\{3,4,t\}$来定义的，而相应的分离这两个顶点集合的割集(按无向图的定义)则为{(1,3),(2,4),(2,3)}，即把这三条弧移去，N 将分为两个部分，可是切割 K_1 不是一个割集。但是切割 K_2 却同时又是一个割集。一般如把N的切割移去，N 不一定分离成为两个部分，但是它一定把N的全部自 s 到 t 的有向链断开，这是因为自 s 到 t 的有向链必含有切割$(V_1,\bar{V}_1)$的某一条弧；所以若把切割$(V_1,\bar{V}_1)$的全部弧移去，自 s 至 t 将不存在任何有向链。这样，从直觉上不难理解，N 的一个流F的值 $f_{s,t}$ 不能超过任何切割的容量 $c(K)$，就是说，有如下的结果：设运输网络 $N(V,A)$ 的一个自 s 至 t 的流 F，其值为 $f_{s,t}$，且令$(V_1,\bar{V}_1)$为分离 s 和 t 的任何一个切割，则下式成立：

$$f_{s,t}=f(V_1,\bar{V}_1)-f(\bar{V}_1,V_1)\leqslant c(V_1,\bar{V}_1) \qquad (5\text{-}2)$$

先证明 $f_{s,t}=f(V_1,\bar{V}_1)-f(\bar{V}_1,V_1)$。按式(5-1a)，有

$$f(s,V)-f(V,s)=f_{s,t}$$

$$f(i,V)-f(V,i)=0 \qquad i\neq s,t$$

$$f(t,V)-f(V,t)=-f_{s,t}$$

这样，对任何集合 X 使 $s\in X$, $t\in\bar{X}$，将有

$$\sum_{i\in X}[f(i,V)-f(V,i)]=f_{s,t}$$

或
$$f(X,V)-f(V,X)=f_{s,t}$$

由于$V=X\cup\bar{X}$，把它代入上式，且由于$X\cap\bar{X}=\phi$，故得上式左边为

$$f(X,V)-f(V,X)=f(X,X\cup\bar{X})-f(X\cup\bar{X},X)$$

但是
$$f(X,X\cup\bar{X})=f(X,X)+f(X,\bar{X})-f(X,X\cap\bar{X})$$
$$=f(X,X)+f(X,\bar{X})$$

而
$$f(X\cup\bar{X},X)=f(X,X)+f(\bar{X},X)-f(X\cap\bar{X},X)$$

$$=f(X,X)+f(\bar{X},X)$$

所以有 $f(X,X)+f(X,\bar{X})-f(X,X)-f(\bar{X},X)=f_{s,t}$

即 $$f(X,\bar{X})-f(\bar{X},X)=f_{s,t}$$

但是,$f(\bar{X},X)\geqslant 0$,所以

$$f_{s,t}\leqslant f(x,\bar{X})=\sum_{i\in X,j\in\bar{X}}f(i,j)$$

按式(5-1b), $f(i,j)\leqslant c(i,j)$

因此 $$f_{s,t}\leqslant\sum_{i\in X,j\in\bar{X}}c(i,j)=c(X,\bar{X})$$

上式对任何X都成立,因此式(5-2)成立。

式(5-2)中的等式说明,运输网络的一个自发点s至收点t的流值等于任何分离s和t的切割中的流的净值,即切割的流减去那些自$\bar{V}_1$至V_1的弧中的流的总和。

作为上述结果的一个特例,设$\min[c(K)]$是N的一个极小切割,即N中不存在其他切割K'使$c(K')<\min[c(K)]$,另设$\max[f_{s,t}]$为N的一个极大流值,则由于

$$f_{s,t}\leqslant\max[f_{s,t}]\leqslant\min[c(K)]\leqslant c(K)$$

即

$$\max[f_{s,t}]\leqslant\min[c(K)] \tag{5-3}$$

就是说,极大流值小于或等于极小切割容量。

§5.3 极大流—极小切割定理

前面已经指出,运输网络分析的一个中心课题就是寻求网络的一个相容的极大流。作为例子,图5-3示出了图5-2的运输网络的一个极大流,这里弧$(3,t)$和$(2,4)$已饱和。下一节将介绍求N的极大流的方法。这一节介绍福特-傅克逊定理(Ford Fulkerson Theorem)或"极大流—极小切割定理",其内定如

下：

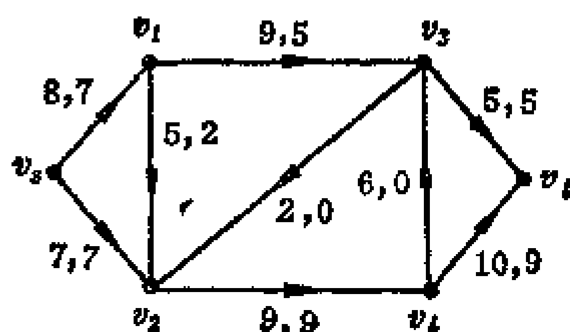


图 5-3　N 的极大流

定理 5-1　在一个给定的运输网络上，流的极大值等于切割的极小容量。

就是说，有

$$\max[f_{s,t}]=\min[c(K)]$$

上一节已证明 $\max[f_{s,t}]$不能超过任何分离 s 和 t 的切割的极小容量，即 $\min[c(K)]$。所以定理 5-1 的证明在于证明式(5-3)的等式成立。下面按照福特和傅克逊提出的方法证明这个定理(还可以用另外方法来证明)。

先定义运输网络的一条路。设相异顶点序列 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 具有下列性质，对 $i=1,2,\cdots,\ n-1$，(v_i,v_{i+1}) 或 (v_{i+1},v_i)为一条弧，且对任何 i，只有一种可能存在，这样的弧的序列称为一条从 v_1 到v_n 的路。这样定义的路与前面定义的有向路的差别在于，从 v_1 走向 v_n 时，允许其中某些弧的方向与走向相反。显然，如不考虑弧的方向，即把弧看成边，则这种路的定义与无向图的是一致的。属于此路的弧(v_i,v_{i+1})称为前向弧，否则就称为后向弧。例如，图 5-2 中，$(s,1)$，$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,t)$就是一条从 s 到 t 的路，其中$(s,1)$，$(1,2)$，$(3,t)$为前向弧，$(3,2)$为后向弧。

解决寻求运输网络的极大流问题的通常方法是：先任意假设网络的一个相容流，然后，自此出发，设法逐渐增大流值。这里我们假设弧的容量为正整数(若弧的容量为有理数，则可化为整数后

再进行)。如果自 s 到 t 的路中,存在一条路其所有前向弧未被饱和,其所有后向弧具有正值的流。在这种情况下,总有可能使这条路的所有前向弧的流增加一个正整数 e,所有后向弧的流减去 e,而同时保持全部弧的流为正值且不超过弧的容量。这样做,不会破坏流的相容条件,同时也不会影响不属于此路的其他弧的流。但是N的流值 $f_{s,t}$ 则增加了 e。所以总有可能逐次增加 $f_{s,t}$,使N的自 s 到 t 的全部路中的任何一条,其中至少有一条前向弧被饱和,和/或一条后向弧的流为零。具有这种条件的路称为不可增广路,否则称为可增广路。当自 s 到 t 的路都不可增广时,$f_{s,t}$ 就不能再增大,即 $f_{s,t}$ 达极大值,否则总可按照上述步骤增大 $f_{s,t}$。

现在,假设一个流F的值已达极大,并按此流F定义一个切割$(X,\bar{X})$;为了证明定理 5-1,正如前面已指出的那样,只需证明此流值等于此切割的容量 $c(X,\bar{X})$。为了做到这一点,设顶点集合 X 递归定义如下:

(a) $s\in X$,(b) 若 $x\in X$ 及$f(x,y)<c(x,y)$,则 $y\in X$;若 $x\in X$ 及 $f(y,x)>0$,则 $y\in X$。可以证明 $t\in\bar{X}$。因为在相反的情况下,按X的定义,将有一条自 s 到 t 的路 $s=x_1,x_2,\cdots,x_n=t$,此路的全部前向弧(x_i,x_{i+1})满足

$$f(x_i,x_{i+1})<c(x_i,x_{i+1})$$

而其全部后向弧(x_{i+1},x_i)满足

$$f(x_{i+1},x_i)>0$$

这样,这条路将是可增广的,因此与 $f_{s,t}$ 为极大相矛盾。因此 t 必属于$\bar{X}$。

由此可见,$(X,\bar{X})$为分离 s 和 t 的一个切割。同时,按X的定义,若$(x,\bar{x})\in(X,\bar{X})$,则 $f(x,\bar{x})=c(x,\bar{x})$;若$(\bar{x},x)\in(\bar{X},X)$,则 $f(\bar{x},x)=0$,否则$\bar{x}$将在X中。所以,有

$$f(X,\bar{X})=c(X,\bar{X}) \qquad f(\bar{X},X)=0$$

这样，在式(5-2)中，将有等式成立，即

$$f_{s,t}=c(X,\overline{X})$$

而此切割的容量必为极小，$f_{s,t}$ 则为极大，否则将与式(5-3)矛盾。

为了确定运输网络的极大流，如果用上面逐次增大流值的方法来达到，这种做法是很不现实的，因为没有解决如何寻找可增广的路的办法。下一节介绍的标记算法将解决此问题。

§5-4　确定极大流的标记算法

这种标记算法分为两个过程。一是标记过程，二是增广过程；前者用来寻找可增广路，同时可以用来确定定理5-1证明中所定义的集合 X。前一过程只需对每一个顶点检查一次，就能找到一个可增广路。后一过程则使沿可增广路的流增长。

在标记过程中，每一顶点给予三种不同的记号。对一个典型的顶点 j 标记时，第一个记号是下标 i，即对所要检查的顶点 $i\in X$ 的下标；第二个记号用"+"或"−"来标记，若 $c(i,j)-f(i,j)>0$ 则记为+号，若 $f(j,i)>0$ 则记为−号；第三个记号则用来说明有关弧上所能增大的流值。下面先介绍标记过程。

A. 标记过程

第一步：发点 s 标记为(s, +, $\varepsilon(s)=\infty$)。这时 s 称为被标记，未细查。其余顶点则称为未标记，未细查。

第二步：选择任一个已标记未细查的顶点 x，

(a) 对所有 y，如存在弧(y,x)，y 是未标记的；当 $f(y,x)>0$ 时，把 y 标记为$(x,-,\varepsilon(y))$，其中 $\varepsilon(y)=\min[\varepsilon(x),f(y,x)]$。这样，$y$ 被标记，但未细查。

(b) 对所有 y，如存在弧(x,y)，y 是未标记的；当 $c(x,y)>f(x,y)$时，把 y 标记为$(x,+,\varepsilon(y))$，其中 $\varepsilon(y)=\min[\varepsilon(x),c(x,y)-f(x,y)]$。这样，$y$ 被标记，但未细查。

把 x 的＋号或－号加圈一个小圆。这表示 x 被标记，被细查。

第三步：重复第二步，直至收点 t 被标记，或者直至不再有顶点可以被标记。在后者情况下，整个算法结束。在前者情况下，转向增广过程。

B. 增广过程

第一步：令 $z=t$，转向增广过程的第二步。

第二步：如果 z 的标记为 $(q,+,e)$，把 $f(q,z)$ 增加 $e(t)$。如果 z 的标记为 $(q,-,e)$，把 $f(z,q)$ 减小 $e(t)$。

第三步：如果 $q=s$，把全部标记去掉，回到标记过程的第一步。否则，令 $z=q$，回到增广过程的第二步。

为了说明标记算法，以图 5-2 所示的运输网络为例。图 5-4*a* 示出了一个假设的相容流（也可以从零值的流开始）。发点 s 标为 $(s,+,\infty)$。顶点 1 标为 $(s,+,4)$，顶点 2 标为 $(s,+,3)$。s 被标记，被细查，故把其＋号加小圈。顶点 3 标为 $(1,+,4)$。顶点 1 被标记，被细查。顶点 4 标为 $(2,+,3)$。顶点 2 被标记，被细查。收点 t 标为 $(4,+,3)$。顶点 4 被标记，被细查（见图 5-4*a*）。

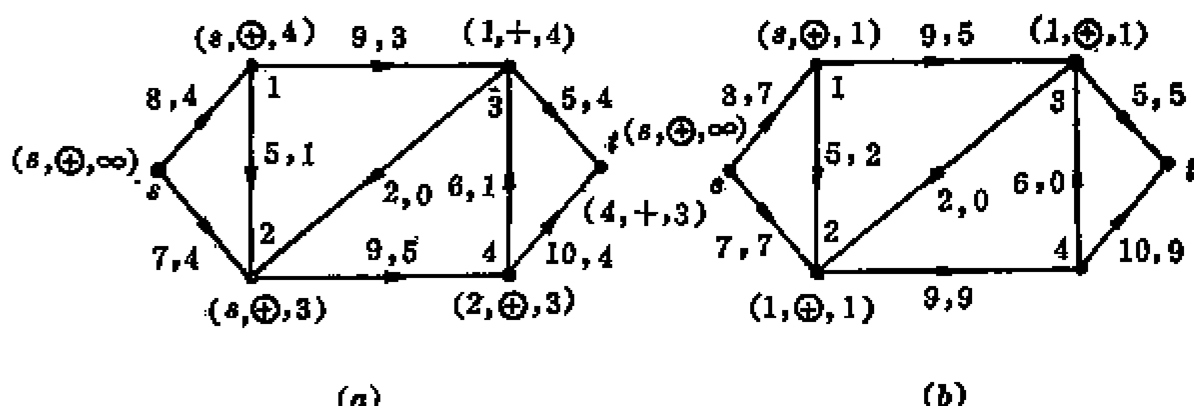


图 5-4　标记算法

由于收点 t 被标记，所以存在一条自 s 到 t 的可增广路。按增广过程，此路为 $(s,2),(2,4),(4,t)$，流的增长值为 $e(t)=3$。然后，把所有标记全部去掉，回到标记过程。

重复上述过程，最终得图 5-4b，由于收点 t 不能被标记，所以 $f_{s,t}$ 不再能增长。上节证明过程中提到的顶点集合 X 就是那些被标记的顶点，在本例中 $X=\{s,1,2,3\}$，而 $\bar{X}=\{4,t\}$。不难看出 $f(X,\bar{X})=c(X,\bar{X})$，$f(\bar{X},X)=0$，而 $F_{max}=14$。

从以上整个过程来看，当一个顶点被标记，被细查后，在之后的过程中就完全可以不再加以考虑，所以这种算法是有效的。某一个顶点 x 得到标记，则表示自 s 到 x 之间的路为一条可增广路的前面一段。自 s 到 x 可能存在许多这种路，但只要找到一条就已足够。如果 t 被标记，则说明自 s 至 t 存在一条可增广的路，流值的改变则可按 $e(t)$ 来确定。

我们假设弧的容量为正整数，如果起始的相容流是正整数，则当 t 被标记后，流值就可以增加一个正整数。因此，算法是有限的，因为每一次流值至少能增加一个单位。所以最终获得的极大流也将是整数的。不过应当指出，这种受整数限制的条件是由于我们用来证明定理 5-1 所用的方法造成的。

在运输网络问题中，自发点至收点运送的物资还可能不只一种而是多种的。因此，产生多种物资流的问题，这里不再介绍。

§5-5 最短路径问题

许多实际问题与寻找一个"图的最短路径"密切相关。从一个城市走到另一个城市，求最短的旅程就是一个例子；要求通过最少量的中间站或通道找出一条通信路径是另一个例子；要求一个最迅速的方法走出一个迷阵也属于这类问题。

先从无向图来介绍最短路径问题。设一个图 $G=(V,E)$，对它的任一条边 e，有一个称之为 e 的长度的数 $l[e]\geqslant 0$。最短路径问题即寻找一条自顶点 v 到顶点 w 的路 μ，使"全长"

$$l[\mu]=\sum_{e\in\mu}l[e]$$

达到极小。注意，这里所谓一条边 e 的长度不一定是指几何长度。譬如，它可以表示走过 e 所费的时间。

假定要求从城市 a 到城市 b 的一个最短路径，则可构成一个图 G，把两个地方的每条道路用图的一条边来表示，并令道路的里程用相应的边长来表示。这样的问题就是寻找图 G 的一个最短路径问题。显然，寻找一条化费时间最小，或最经济的旅程，都属于同一类型的问题。

先介绍一种寻求无向图的最短路径的标记算法。设顶点 v_1 为起点。用零标记 v_1，其他顶点则标以任意相当大的数。如果存在一条边 $[v_i,v_j]$，其顶点 v_j 的标记大于 v_i 的标记与边 $[v_i,v_j]$ 的长 $l[v_i,v_j]$ 之和，则把 v_j 的标记改为此和数。当不再可能进一步做任何这种代换时，考虑任一顶点 v_j，其标记将表示自 v_1 至 v_j 的最短路径的全长。要找出一条自 v_i 到 v_1 的最短路径，则可自 V_i 顺着一条边到 v_j，v_j 的标记与 $l[x_i,x_j]$ 之和等于 v_i 的标记；依次确定这样的顶点，直到 v_1 为止。

作为一个简单例子，考虑图 5-5a 所示的图 G。除 x_1 标为 0 外，其余顶点都标为 100（各边长度均示于对应的边旁）。把所有与 v_1 相邻的顶点 v_i 的标记换以 $l[v,v_i]$，因为对每一这种顶点

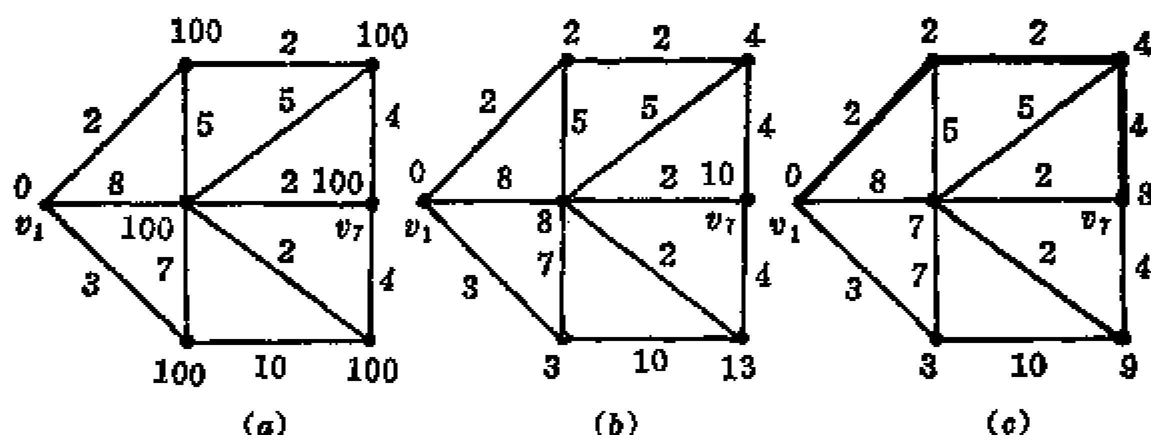


图 5-5　寻找最短路径

有 $0+l[v_1,v_i]<100$。然后，经过几步可得图 b；最终得图 c。这时全部顶点的标记不再能改变。因而从 v_1 到 v_7 的最短路径之长为 8，即 v_7 的标记；其具体路径如图 c 中的粗线所示。同理，任一顶点 v_j 的标记是它到 v_1 的最短路径之长。

下面把上述的方法系统化。设 S 为顶点集合 V 的一个真子集，$\bar{S}=V-S$。如果用 $P=[v_1,\cdots,v,w]$来表示一条自 v_1 到 $\bar{S}$ 的最短路径，显然 v 必属于 S，且属于 P 的一段自 v_1 到 v 的路必然是最短的。因此，如果用 $d[v_1,w]$表示一条自 v_1 到 w 的最短路径的全长，则有

$$d[v_1,w]=d[v_1,v]+l[v,w]$$

而自 v_1 到 $\bar{S}$ 的最短路径的全长由下式给出：

$$d[v_1,\bar{S}]=\min_{\substack{v\in S\\ w\in \bar{S}}}\{d[v_1,v]+l[v,w]\} \qquad (5\text{-}4)$$

这个公式是下面要介绍的标记法的依据。从顶点集合 $S_1=\{v_1\}$开始，然后逐次取 V 的子集合 $S_2,S_3,\cdots,S_k\cdots$，使得在第 k 步，自 v_1 到 $\bar{S}_k$ 的顶点的最短路径均为已知。

第一步，确定一个距 v_1 最近的顶点。这是很容易做到的，因为只要从 $\bar{S}_1$ 中选择一个顶点 $v_2\in\bar{S}_1$，使 $d[v_1,v_2]=d[v_1,\bar{S}_1]$，按式(5-4)，得出

$$d[v_1,\bar{S}_1]=\min_{v\in\bar{S}_1}\{l[v_1,v]\}$$

然后，令 $S_2=\{v_1,v_2\}$ 并令 P_1 表示自 v_1 到 v_2 的一条最短路径。一般情况下，如果集合 $S_k=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$及其相应的最短路径 P_1，$P_2,\cdots,P_k$ 都已经确定，按式(5-4)计算 $d[v_1,\bar{S}_k]$ 且选择一个顶点 $v_{k+1}\in\bar{S}_k$，使得 $d[v_1,v_{k+1}]=d[v_1,\bar{S}_k]$。按式(5-4)，对某一个 $j\leqslant k$，有 $d[v_1,v_{k+1}]=d[v_1,v_j]+l[v_j,v_{k+1}]$，这样，把边$[v_j,v_{k+1}]$加到 P_j 就获得一条自顶点 v_1 到顶点 v_{k+1} 的最短路径。

下述的标记算法过程是以上述思想为基础的。起点 v_1 标以

$h(v_1)\quad 0$，其他顶点则标以 $h(v)=\infty$（或一个足够大的数）。在标记过程中，变更各顶点的标记，使得在第 k 步，顶点 $v(v\in S_k)$ 的标记为 $h(v)=d[v_1,v]$，且顶点 w 的标记为

$$h(w)-\min_{v\in S_{k-1}}\{d[v_1,v]+l[v,w]\}$$

共中 $w\in\bar{S}_k$。

标记算法如下：

（a）开始时，令 $h(v_1)\quad 0$，对 $v\neq v_1$，$h(v)\ \ \infty$；$S_1-\{v_1\}$ 而 $k\quad 0$

（b）设在第 k 步，对每一个顶点 $w\in\bar{S}_k$，把 $h(w)$ 用 $\min\{h(w),h(v_k)+l(v_k,w)\}$ 来代替。计算 $\min_{w\in\bar{S}_k}\{h(w)\}$，且令 v_{k+1} 表示对应此极小值的顶点。

$$令\ S_{k+1}=S_k\cup\{v_{k+1}\}$$

（c）设终点为 v_n，则 $k=n-1$ 时就停止。若 $k<n-1$，以 $k+1$ 代替 k，回到（b）。

当此算法终止时，则顶点 w 的最终标记 $h(w)$ 表示自 v_1 到 w 的最短路径之全长。

以图 5 6a 所示的无向图为例子，具体的标记过程如下：

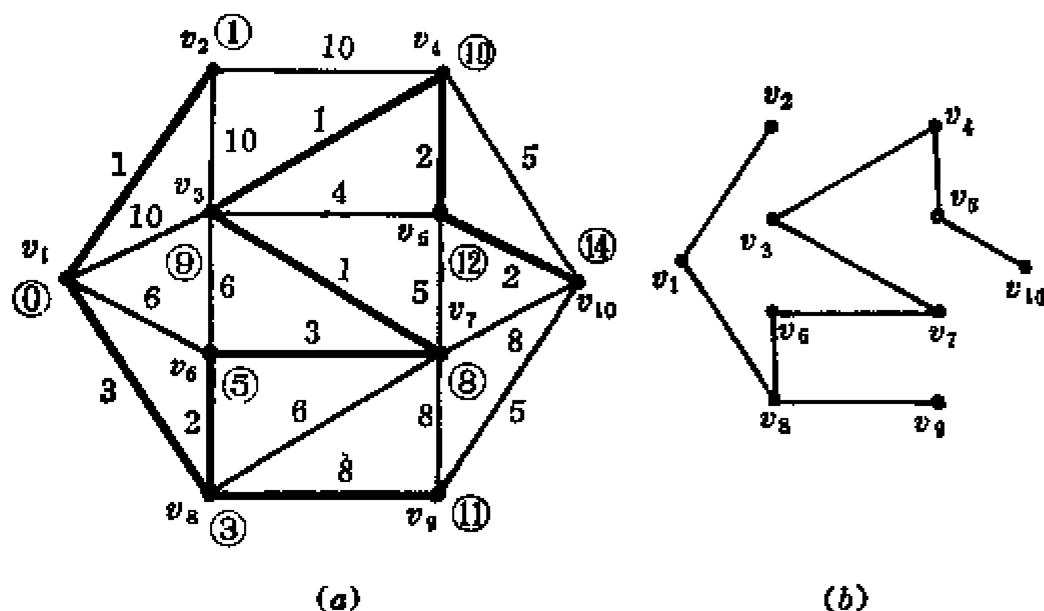


图 5 6　最短路径的标记算法

(1) 开始，v_1标为 0，其余均为∞。$S_1=\{v_1\}$。

(2) 第一步，v_2标为 1，v_3 标为 10，v_6 标为 6，v_8 标为 3。$h(2)$为最小，故选择 v_2。$S_2=\{v_1, v_2\}$。

(3) 第二步，v_4 标为 11（$=h(2)+10$）；其余不变。$h(8)=3$ 为最小，故选择 v_8。$S_3=\{v_1, v_2, v_8\}$。

(4) 第三步，v_6 改为 5，v_9 标为 11，v_7 标为 9。选择 v_6。$S_4=\{v_1, v_2, v_8, v_6\}$。

(5) 第四步，v_7 标为 8，选择 v_7。$S_5=\{v_1, v_2, v_8, v_6, v_7\}$。

(6) 第五步，v_3 改为 9，v_5 标为 13，v_{10} 标为 16。选择 v_3。$S_6=\{v_1, v_2, v_8, v_6, v_7, v_3\}$。

(7) 第六步，v_4 改为 10。选择 v_4。$S_7=\{v_1, v_2, v_8, v_6, v_7, v_3, v_4\}$。

(8) 第七步，v_5 改为 12，v_{10} 改为 15。选择 v_5。$S_8=\{v_1, v_2, v_8, v_6, v_7, v_3, v_4, v_5\}$。

(9) 第八步，v_{10} 改为 14。终止。

最终所得的各顶点的标记如图 5-6a 所示。故得自 v_1 到v_{10}的最短路径之长为 14。

用这种算法，只能求得自 v_1 到各其余顶点的最短路径之长，但并不给出具体的最短路径。但是，不难看出，整个过程其实就是逐步生成一个以 v_1 为“根”的树（见图 5-6b）。凡属于这个树的任一条边$[v_i, v_j]$，它所关联的两个顶点的标记 $h(i)$，$h(j)$ 之差恰好等于该边之长，即有 $h(j)-h(i)=l[i, j]$；在标记过程中，依逐次所选择的顶点，就可以得出这个结果。按照此原则，不难把这个树确定下来，从而可以得出自 v_1 至所有其他顶点之最短路径。

从原则上讲，这个算法可以推广到有向图；在有向图中，一条自 v_1 至其他任何顶点的最短路径应是一条有向路。

最短路径问题与运输网络的极大流问题有着密切关系（见参

考书3)。

§5-6 通讯网络

这一节介绍有关通讯网络的一些初步概念。用一个无向图的顶点来代表收发讯终端，若两个终端之间有通讯联系，则用一条边联接对应的顶点，通道容量(传输的信息量)的大小可以用边的加权来描述。这种图就可以用来描述一个通讯网络。这样，一对终端之间可以进行传输的极大信息量，就是对应顶点之间的极大流值（等于相应顶点的极小切割容量)。为了描述各对终端之间的通讯情况，可以定义一个需求矩阵 $\mathbf{R}\triangleq[r_{ij}]$，其每一行和每一列都分别对应图的一个顶点；对于 $i\neq j$，$r_{ij}\geqslant 0$ 是顶点 v_i 和 v_j 之间所需求的流值；至于 r_{ii} 则可以任意指定，一般可令其为一个很大的数值或∞。另外，还可以定义一个所谓终端容量矩阵 $\mathbf{T}\triangleq[t_{ij}]$，其每一行和每一列同样分别对应图的一个顶点；对于 $i\neq j$，t_{ij} 将是分离顶点 i 和 j 的极小切割的容量；至于 t_{ii} 则可以任意指定。

给定一个描述通讯网络的图 G，要求求出 G 的终端容量矩阵 $\mathbf{T}$，这属于分析问题。通讯网络的综合问题则是要求找出一个图 G，其终端容量矩阵 $\mathbf{T}$ 等于给定的需求矩阵 $\mathbf{R}$。

要求出图 G 的终端容量矩阵，是否需要在每对顶点之间进行一次极大流的计算？回答是不必要的，事实上对一个具有 n 个顶点的图，只需要进行求解 $n-1$ 次流的问题就够了。有兴趣的读者可参阅参考书3及7。

综合问题则必须研究终端容量矩阵 $\mathbf{T}$ 的性质，或者说，如果存在一组可以用来表示一个图的任意两个顶点之间的极大流的数，则这组数应满足怎样的必要和充分条件。

有关通讯网络的另一类问题则是研究所谓“脆弱性”(vulne-

rability)问题。一个通讯系统受攻击后能否继续工作，其经承破坏的能力就是所谓"脆弱性"。例如，图 5-7 所示的通讯网络就极容易遭受破坏，因为只要把中间的那个顶点去掉，则所有各顶点之间的联系都将中断。这里所谓的"破坏"，可能是敌人有意识的破坏，或者是由于其他因素所造成的干扰；在后一种情况下则涉及到网络的可靠性问题。

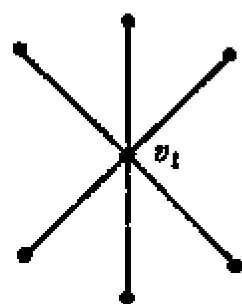


图 5-7　易受破坏的网络

如果一个通讯系统用一个图 G 来描述，则所谓遭受破坏，可能是指当图 G 的某些顶点或边(弧)被移去后，G 被分为两个部分；或者是指特定的两个顶点集合之间的路被切断，等等。

作为一个简单例子，考虑图 5-8 所示的图 G_1、G_2、G_3、G_4。G_1 是一个树，只要移去一个顶点或一条边，就能切断至少一对顶点之间的路。对 G_2 来说，把顶点 v_1 移去则可达到同样目的。对 G_3 和 G_4 来说，则比较不易遭受"破坏"；直观上，就是说 G_3 和 G_4 的"连通度"高。

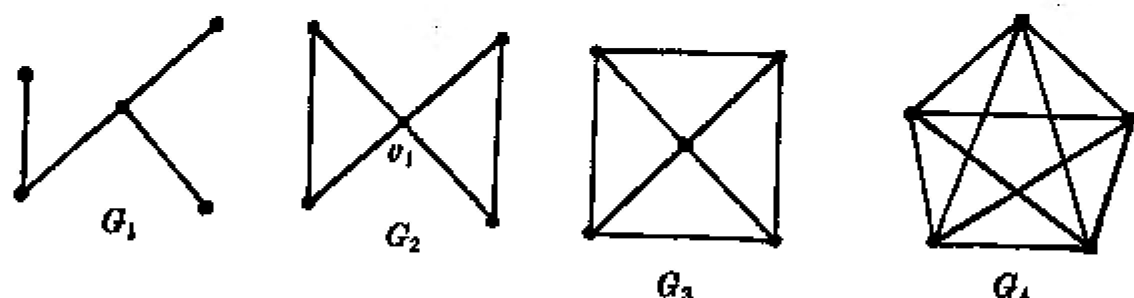


图 5-8　图的连通性

这类问题涉及到以前讲过的割集的概念，那种割集实际上是指边的割集。还可定义另一种所谓"顶点割集"；对一个无向的连通图 G 来说，它的一个顶点割集是 G 的一个极小顶点集合，当被移去后将使 G 分离。往往有些系统易遭受破坏的不是"边"而是"顶点"，例如航空系统，把机场破坏，则可中断航行，但航道的封锁或

破坏则比较困难。所以研究图的脆弱性时，顶点割集的概念很重要。因此，想要研究的问题将是：如果要切断至少一对顶点之间的路，必须移去的顶点的最小数目是多大。另外一方面，某些系统的“顶点”不易遭受破坏，但其“边”则易受攻击；研究这类问题时就涉及到“边”被移去的问题。上述这些问题的研究都与图的连通性有着密切的联系。

总之，图论的应用是多方面的，本书所介绍的只是一个侧面。

主要参考书

1 图的理论及其应用 C.贝尔热著 李修睦译，1963。

2 Seshu, S. and Reed, M. B., *Linear Graphs and Electrical Networks*, 1961。

3 Ford, L. R. and Fulkerson, D. R., *Flows in Networks*, 1962。

4 Busacker, R. G. and Saaty, T. L., *Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications*, 1965。

5 Harary, F., *Graph Theory*, 1969。

6 Chen, W. K., *Applied Graph Theory*, 1971。

7 Frank, H. and Frisch, I. T., *Communication, Transmission and Transportation Networks*, 1971。

8 Johnson, D. E. and Johnson, J. R., *Graph Theory with Engineering Applications*, 1972。

9 Berge, C., *Graphs and Hypergraphs*, 1973。

10 Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, 1976。

